

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

THÉORIE DES NŒUDS  
ET ESPACES DE REPRÉSENTATIONS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

JEAN-BAPTISTE PLOUHINEC

AVRIL 2006

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout particulièrement à exprimer mes sincères remerciements à mon directeur M. Olivier Collin, professeur de mathématiques à l'Université du Québec à Montréal, pour l'assistance et la disponibilité dont il a fait preuve tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Les corrections et commentaires apportés par M. Steven Boyer, également professeur de mathématiques à l'Université du Québec à Montréal, m'ont permis d'améliorer ce travail, je tiens donc à le remercier également.

Merci enfin à ma famille pour son soutien, et un grand merci à Johanna pour m'avoir encouragé au cours de ces années.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	vi
CHAPITRE I	
INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Définitions . . . . .	1
1.2 Mouvements de Reidemeister . . . . .	2
1.3 Invariants topologiques . . . . .	3
CHAPITRE II	
ESPACES DE REPRÉSENTATIONS ET GROUPE DE NOEUD . . . . .	26
2.1 Le groupe $SU(2)$ . . . . .	26
2.2 Quaternions et rotations . . . . .	30
2.3 Espaces de Représentations . . . . .	33
2.4 Chirurgie de Dehn . . . . .	42
CHAPITRE III	
REPRÉSENTATIONS DIHÉDRALES ET CHIRURGIE . . . . .	47
3.1 Invariant construit par chirurgie . . . . .	51
3.2 Chirurgies et représentations diédrales . . . . .	53
3.3 Nombre d'intersection sur le tore . . . . .	57
3.4 Relations skeins et formule de Conway en $t = -1$ . . . . .	59
3.5 Invariant de Casson . . . . .	64
CONCLUSION . . . . .	66
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	68

## LISTE DES FIGURES

1.1	Nœud de trèfle . . . . .	2
1.2	Mouvements de Reidemeister . . . . .	3
1.3	Invariance des critères de colorabilité . . . . .	4
1.4	Nombre d'entrelacement . . . . .	6
1.5	Stabilisation sur une surface de seifert . . . . .	7
1.6	Mouvements de Reidemeister sur nœud de huit . . . . .	10
1.7	Mouvement servant à obtenir une surface de Seifert . . . . .	11
1.8	Surface obtenue pour le nœud de huit . . . . .	11
1.9	Calcul du groupe fondamental pour le nœud $7_7$ . . . . .	14
1.10	Relation entre générateurs de Wirtinger . . . . .	14
1.11	Présentation de Wirtinger pour le nœud de huit . . . . .	15
1.12	Coupe et copie des surfaces de Seifert . . . . .	17
1.13	Corps à anses . . . . .	20
2.1	Représentation schématique de $SU(2)$ . . . . .	29
2.2	Entrelacs de Whitehead . . . . .	35
2.3	Les générateurs projetés sur $\Sigma_0$ . . . . .	37

2.4	Identification pour obtenir $\hat{R}(\pi_1(S^3 \setminus WL))$ . . . . .	39
2.5	Homotopie du tore pointé . . . . .	41
2.6	Orientation du tore . . . . .	43
2.7	Twist de Dehn le long d'une courbe . . . . .	44
2.8	Obtention de deux courbes homotopes par twists de Dehn. . . . .	46
3.1	Choix d'une base pour le groupe fondamental de F. . . . .	48
3.2	Équivalence par mouvement de Kirby 2 . . . . .	53
3.3	Chirurgie le long d'un croisement . . . . .	54
3.4	Entrelacs pour le calcul des relations skeins . . . . .	59

## RÉSUMÉ

Ce mémoire a pour but de présenter quelques résultats classiques de théorie des nœuds et de faire un parallèle entre cette théorie et les espaces de représentations associés au groupe d'un nœud.

Le premier chapitre est consacré à une introduction de la théorie des nœuds dans lequel nous allons définir les surfaces de Seifert, le polynôme d'Alexander, le nombre d'entrelacement, les matrices de Seifert, le groupe d'un nœud. Quelques notions plus complexes vont être présentées comme le revêtement double ramifié le long d'un nœud, qui nous permettra d'établir une relation entre l'ordre du groupe d'homologie de ce revêtement double et le polynôme d'Alexander évalué en -1.

Le second chapitre présente le groupe  $SU(2)$  et le lien existant entre la conjugaison par un de ces éléments et les rotations dans l'espace. Sont ensuite introduites les notions d'espaces de représentations illustrées par le calcul explicite de celui du cercle, du nœud de trèfle, du double de Whitehead et du tore. Dans ce même chapitre nous présentons les twists de Dehn, chirurgies de Dehn et le résultat de Lickorish concernant l'obtention à partir de  $S^3$ , de toute 3-variété fermée orientable, par chirurgie entière le long d'un entrelacs.

Le troisième chapitre se concentre sur les espaces de représentations dans le groupe binaire diédrale. Ces quelques pages proposent une ébauche de construction par chirurgie du polynôme d'Alexander évalué en -1. Nous présentons une approche géométrique de la construction de cet invariant en utilisant les relations skeins et la formule de Conway. Les dernières pages de ce mémoire sont consacrées à une brève introduction à l'invariant de Casson.

Mots clés :

MATHÉMATIQUES, THORIE DES NOEUDS, ESPACES DE REPRÉSENTATIONS, INVARIANT DE CASSON, QUATERNIONS.

# CHAPITRE I

## INTRODUCTION

Dans cette première partie nous allons présenter de manière concise certains résultats connus de théorie des nœuds. Nous allons entre autres évoquer quelques invariants topologiques utiles afin de différencier les nœuds et présenter quelques constructions topologiques dont les surfaces de Seifert, le revêtement double ramifié le long d'un nœud. Ces constructions permettront pour l'essentiel de définir la torsion et de présenter la relation entre cet invariant et le polynôme d'Alexandre évalué en  $-1$ . Cette introduction à la théorie des nœuds s'inspire largement des références citées à la fin du présent document.

### 1.1 Définitions

Soit  $M$  une 3-variété fermée orientable. On appelle un nœud  $K \subset M$  une courbe simple fermée de  $M$ . Deux nœuds  $K_1$  et  $K_2$  sont dits équivalents  $K_1 \sim K_2$  s'il existe un homéomorphisme préservant l'orientation  $h : M \rightarrow M$  tel que  $h(K_1) = K_2$ . Il sera utile de considérer également les entrelacs  $L$  dans  $M$  qui sont tout simplement une union disjointe de nœuds.

**Remarque :** Si  $K_1$  et  $K_2$  sont équivalents alors en particulier  $h$  envoie par un homéomorphisme  $M \setminus K_1$  sur  $M \setminus K_2$ , si bien que les groupes fondamentaux  $\pi(M \setminus K_1)$  et  $\pi(M \setminus K_2)$  sont isomorphes. Le groupe du nœud jouera par conséquent un rôle impor-



tant dans notre étude.

## 1.2 Mouvements de Reidemeister

Nous allons ici définir les mouvements que l'on peut effectuer sur un diagramme de projection d'un nœud dans  $S^3$  et qui laissent invariant le type topologique du nœud de départ.

Ces mouvements sont importants dans la mesure où lorsqu'on cherche à savoir si deux nœuds sont équivalents, on peut ramener le problème à vérifier si il existe une suite finie de mouvements de Reidemeister permettant de passer du diagramme associé au premier nœud au diagramme du second.

Le diagramme d'un nœud  $K$  est obtenu à partir de la projection standard  $p : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ . De façon générique, cette projection possède au plus des points doubles transverses, et ces points doubles seront vus comme des croisements de la projection de notre nœud. La figure 1 présente le diagramme d'un nœud de trèfle, autour d'un croisement, on efface la portion du nœud qui passe en dessous dans  $S^3$ .

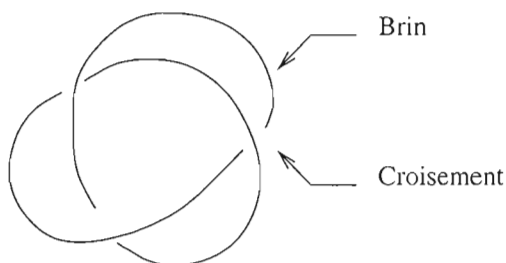


Figure 1.1 Nœud de trèfle

La figure 1.2 nous présente les types de mouvements autorisés qui permettent de changer notre diagramme sans pour autant transformer notre nœud. Les diagrammes obtenus sont alors dits équivalents.

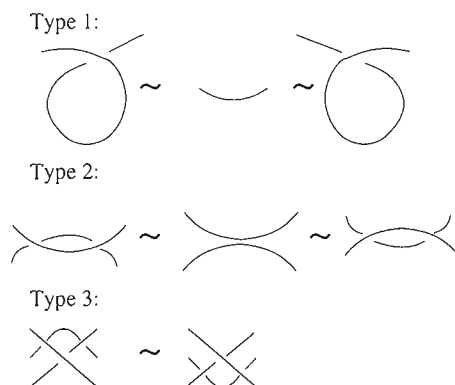


Figure 1.2 Mouvements de Reidemeister

### Théorème 1 (*Reidemeister*) :

*Deux diagrammes définissent le même noeud si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre en utilisant un nombre fini de fois les opérations (1) (2) ou (3) plus isotopie.*

Pour plus de détails, voir la preuve du théorème 1 p. 31 (Liv)

## 1.3 Invariants topologiques

### La tri-coloriabilité :

On peut dès à présent définir quelques invariants pour nos nœuds. Une façon naturelle de démontrer qu'un objet mathématique associé à un nœud est un invariant topologique est de montrer que l'objet en question est invariant sous les trois types de mouvements de Reidemeister.

Commençons par introduire un invariant particulièrement élémentaire, la tri-coloriabilité. Cet invariant peut être défini par les quatre règles suivantes :

1. Chaque brin est coloré avec une seule couleur.
2. Lorsqu'un brin passe au dessus d'un croisement, le brin qui le prolonge est de même couleur.

3. A chaque croisement, soit une seule couleur est présente, soit les trois couleurs sont présentes.
4. Sur les trois couleurs, on en utilise au moins deux pour colorier le diagramme.

Comme application du théorème de Reidemeister, montrons que la tri-coloriabilité est un invariant de noeuds.

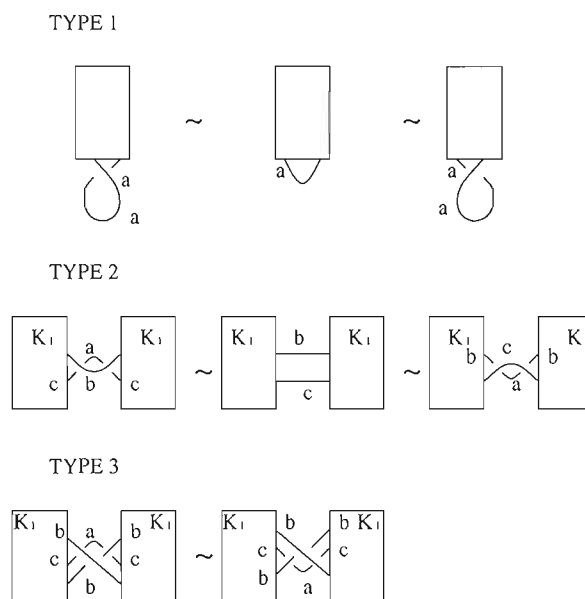


Figure 1.3 Invariance des critères de coloriabilité

On remarque que nos choix de couleurs (a,b,c) en chaque croisement sont faits dans le cas où ce croisement n'est pas uni-coloriable, afin de présenter directement le cas général. Évidemment, chacun de ces croisements peut être considéré comme uni-coloriable. Dans ce cas l'invariance du critère de tri-coloriabilité reste vraie.

Dans le cas du mouvement de type 1, on a simplement à colorier le brin de la même couleur puisqu'il s'agit d'un croisement où ce brin passe au dessus ou au dessous de lui-même, on se réfère donc à notre second critère. Dans le cas du mouvement de type 2, on vérifie que le critère de tri-colorabilité du diagramme de  $K_1$  n'est pas affecté par

ce mouvement. En effet, le brin  $a$  n'est relié à aucun autre croisement du diagramme de  $K_1$  et les deux croisements apparaissant dans notre figure 1.3 répondent aux critères de coloriabilité. De plus, les autres croisements de  $K_1$  conservent les mêmes couleurs puisque les brins  $b$  et  $c$  n'ont pas changé de couleur au cours de notre mouvement. Dans le cas du mouvement de type 3, là encore, tout autre croisement du diagramme de  $K_1$ , hormis les trois présentés à la figure 1.3, peut conserver la même couleur au cours de notre mouvement. Le fait que notre manière de colorier les brins réponde aux critères de tri-coloriabilité nous permet alors de dire que la tri-coloriabilité est effectivement un invariant de nœuds.

### Polynôme d'Alexander

#### – Surface de Seifert

Une surface de Seifert pour un entrelacs orienté  $L_1$  dans  $S^3$ , c'est à dire pour une union disjointe de nœuds, est une surface compacte connexe orientable dont le bord est précisément l'entrelacs  $L_1$ . Comme d'habitude, on considère l'entrelacs dans  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$  comme étant un entrelacs dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Théorème 2** *Tout entrelacs dans  $S^3$  borde une surface de Seifert.*

Ce résultat est prouvé au théorème 7.1 pp. 73-74 de (Sav).

On rappelle que toute surface lisse connexe avec bord plongée dans  $\mathbb{R}^3$  est isotopie à une surface construite en attachant des bandes à un disque. Pour plus de détails, voir p. 53 de (Sav).

#### – Nombre d'entrelacement

Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux nœuds disjoints et orientés dans  $S^3$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Leur nombre d'entrelacement  $l_k(K_1, K_2)$  est défini de l'une des manières suivantes :

1. Comme  $H_1(S^3) = 0$ , la courbe  $K_1$  borde une surface  $F$ . Sans perdre de généralité, on peut supposer cette surface orientable et plongée. On

oriente  $F$  grâce au vecteur normal  $\vec{n}$  tel que le triplet  $\langle \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{n} \rangle$  soit orienté positivement, avec  $\vec{\tau}$  un vecteur tangent de  $K_1$ , et  $\vec{\nu}$  un vecteur intérieur normal de  $K_1$  dans  $F$ . Après une petite perturbation si nécessaire, il est possible de considérer que  $K_2$  intersecte transversalement  $F$  en un nombre fini de points. À chaque fois que  $K_2$  traverse  $F$  c'est selon la direction  $\vec{n}$  ou  $-\vec{n}$ . On pondère l'intersection du premier type par un  $+1$  et du second type par un  $-1$ . La somme de ces poids nous donne  $l_k(K_1, K_2)$ .

2. On considère une projection régulière de  $K_1 \cup K_2$ . Chaque point pour lequel  $K_1$  passe sous  $K_2$  est comptabilisé comme le présente la figure 4. La somme de ces nombres est appelée  $l_k(K_1, K_2)$ .

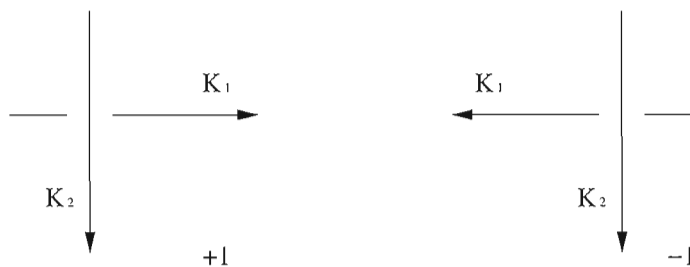


Figure 1.4 Nombre d'entrelacement

En remarquant que  $K_2$  est transverse à notre surface  $F$  et en appliquant notre "règle de la main droite" au schéma de la figure 1.4 on s'aperçoit effectivement que nos deux définitions sont équivalentes.

**Remarque :**  $l_k(K_1, K_2) = l_k(K_2, K_1)$  et  $l_k(-K_1, K_2) = -l_k(K_1, K_2)$  ou  $-K_1$  représente  $K_1$  avec l'orientation inverse.

**La stabilisation :** En considérant une surface de Seifert comme étant un disque

sur lequel on a attaché des bandes, on peut modifier cette dernière en lui attachant deux nouvelles bandes de la manière présentée à la figure 1.5.

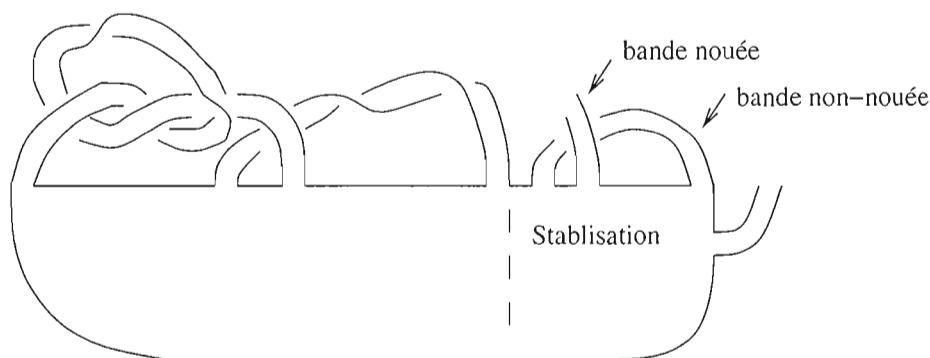


Figure 1.5 Stabilisation sur une surface de seifert

L'opération qui consiste à attacher une première bande non-nouée et non-tordue au disque et une seconde bande que l'on peut nouer et tordre est appelé une stabilisation de  $F$ . Deux surfaces de Seifert qui diffèrent par un nombre fini de stabilisations sont dites **stables équivalentes**.

On remarque évidemment que, dans ce cas, le bord de la nouvelle surface est équivalent à celui de la surface de Seifert originale.

**Théorème 3** *Toutes les surfaces de Seifert pour un nœud  $K$  sont stables équivalentes.*

Ce résultat est prouvé au théorème 7.7 de (Kau).

#### – Matrice de Seifert

Étant donné un entrelacs  $L_1$ , on fixe une surface de Seifert  $F$  pour cet entrelacs, il est alors possible de définir un côté "au dessus" et un côté "au dessous" pour cette surface. Formellement, cela signifie que l'on se donne un champ de vecteur normal et non nul sur  $F$ .

Soit  $x$  une courbe simple fermée de  $F$ , on peut construire son **déplacement positif**,  $x^+$ , qui est parallèle à  $x$ , et vit juste au dessus de  $F$  dans la direction du champs normal. On pose  $x_1, \dots, x_n$  les générateurs pour une base de  $H_1(F; \mathbb{Z})$ . La **matrice de Seifert** notée  $S$  est la matrice  $n \times n$  dont les entrées sont  $S_{ij} = l_k(x_i^+, x_j)$ .

**Remarque :** En considérant le fait que  $l_k(x_i^-, x_j) = l_k(x_i, x_j^+)$ , où  $x_i^-$  signifie un déplacement négatif. On en déduit que si l'on change l'orientation de  $F$  on transforme  $S_{ij}$  en  $S_{ji}$ , on obtient donc la matrice transposée  $S^T$  en changeant l'orientation de  $F$ .

L'effet obtenu par stabilisation correspond, au niveau matriciel, à additionner deux nouvelles colonnes et lignes comme indiqué ci-dessous (on considère ce résultat à changement de base près). En considérant un générateur  $x_n$  de  $H_1(F; \mathbb{Z})$  comme étant celui qui passe par la bande non nouée, et  $x_{n-1}$  celui qui correspond à la bande nouée, on a effectivement  $l_k(x_n^+, x_{n-1}) = \pm 1$ . Pour tout autres générateurs, les nombres d'entrelacements  $l_k(x_n^+, x_i)$  et  $l_k(x_i^+, x_n)$  sont nuls et on ne connaît pas le nombre d'entrelacement entre ces générateurs et  $x_{n-1}$  ou  $x_{n-1}^+$ .

$$S \rightarrow \begin{pmatrix} & & * & 0 \\ & S & \vdots & \vdots \\ & & * & 0 \\ * & \dots & * & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

#### – Polynôme d'Alexander

**Le genre :** On définit  $g(K)$  le genre d'un nœud  $K$  par

$$g(K) = \min\{ \text{genre}(F) : F \text{ une surface de Seifert pour un nœud } K \}.$$

Soit  $S$  une matrice de Seifert pour un nœud  $K$  d'une surface de Seifert  $F$  de

genre minimal, et  $S^T$  la transposée de notre matrice de Seifert  $S$ . Le polynôme d'Alexander de  $K$  est défini par :

$$\Delta_K(t) = \det(t^{\frac{1}{2}}S - t^{-\frac{1}{2}}S^T)$$

Comme le nombre de générateurs pour  $H_1(F; \mathbb{Z})$  est donné par la formule  $G = 1 + n - s$  où  $G$  est le nombre de générateurs de  $H_1(F; \mathbb{Z})$ ,  $n$  le nombre de croisements,  $s$  le nombre de cercles de Seifert. On obtient évidemment que  $G = 2 \cdot \text{genre}(F)$ .

En prenant en considération le fait que  $\text{rang}(S) = 2 \cdot \text{genre}(F)$  on observe que  $\Delta_K(t)$  est en fait un polynôme en  $t$  et  $t^{-1}$  et que  $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ . En effet, comme  $\text{rang}(S)$  est pair, on va multiplier un nombre pair de fois  $t^{\pm \frac{1}{2}}$  avec  $t^{\pm \frac{1}{2}}$  lors du calcul de  $\det(t^{\frac{1}{2}}S - t^{-\frac{1}{2}}S^T)$ , ce qui permet de conclure.

**Remarque :**  $\Delta_K(t) = (-1)^{\text{rang}(S)} \Delta_K(t^{-1})$ .

**Corollaire 1** *Le polynôme  $\Delta_k(t)$  est un invariant bien défini de  $K$ .*

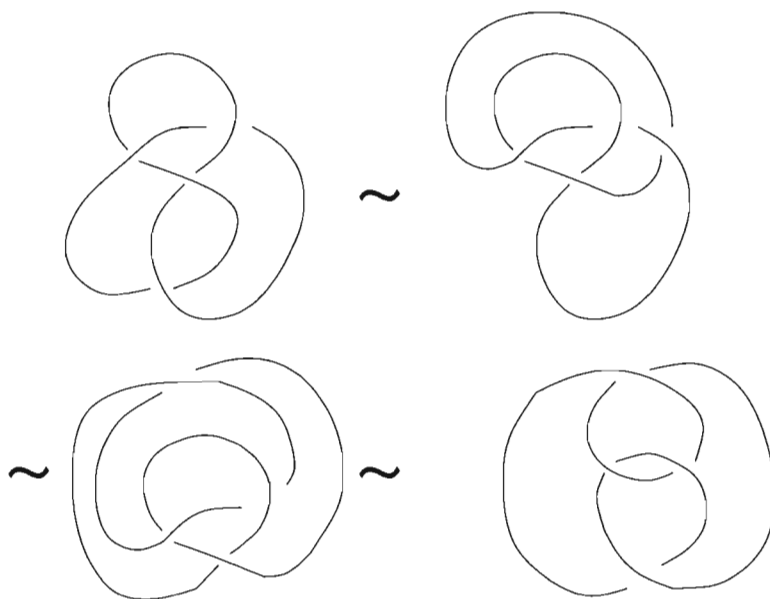
**Preuve :** Il faut voir que  $\Delta_k(t)$  ne dépend pas du choix de  $S$ , mais comme deux surfaces de Seifert pour un nœud  $K$  sont  $S$ -équivalentes, il nous suffit de prouver que l'opération de stabilisation ne change pas la valeur  $\det(t^{\frac{1}{2}}S - t^{-\frac{1}{2}}S^T)$ . C'est effectivement le cas puisque deux matrices  $S_1$  et  $S_2$  sont  $S$ -équivalentes si il existe une suite d'opérations de stabilisation, tel que pour les matrices résultantes  $S'_1$  et  $S'_2$ , on puisse trouver une matrice  $U$  tel que  $S'_1 = U^T S'_2 U$  avec  $U$  matrice entière inversible correspondant à la matrice de changement de base pour  $H_1(F; \mathbb{Z})$ . Or

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &= \det(t^{\frac{1}{2}}S'_1 - t^{-\frac{1}{2}}(S'_1)^T) \\ \Leftrightarrow \Delta_K(t) &= \det(t^{\frac{1}{2}}U^T S'_2 U - t^{-\frac{1}{2}}(U^T S'_2 U)^T) \\ \Leftrightarrow \Delta_K(t) &= \det U^T \det(t^{\frac{1}{2}}S'_2 - t^{-\frac{1}{2}}(S'_2)^T) \det U. \quad CQFD \end{aligned}$$

**Exemple de calcul pour polynôme d'Alexander d'un nœud de huit :**

On commence par transformer le nœud de huit comme on le connaît en utilisant des mouvements de Reidemeister comme cela apparaît à la figure 1.6.





**Figure 1.6** Mouvements de Reidemeister sur nœud de huit

Une fois notre nouveau diagramme obtenu, on construit une surface orientable  $S_8$  dont le bord  $\partial S_8$  est le nœud de huit en appliquant l'algorithme défini ci-après.

**Algorithme de construction d'une surface de Seifert  $S$  :**

Soit  $K$  un nœud orienté :

1. On commence par effacer chaque croisement en prenant soin de remplacer ceux-ci de la manière indiquée à la figure 1.7.
2. Il en résulte un nombre fini de courbes fermées et plus aucun croisement.
3. Il reste alors simplement à joindre des bandes aux différents disques dont les bords sont les courbes fermées précédentes.
4. Ces bandes sont construites à partir des croisements précédemment effacés, les bords de ces bandes correspondant précisément aux croisements effacés.

Par construction on a directement le fait que le bord de la surface obtenue soit notre nœud  $K$ . Il faut à présent voir pourquoi la surface obtenue est orientable.

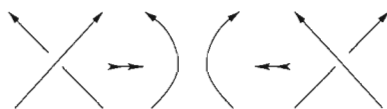


Figure 1.7 Mouvement servant à obtenir une surface de Seifert

Commençons par choisir deux couleurs A et B afin de les attribuer à chacun de nos disques. Si le bord du disque est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, on le colore en A, sinon en B. On fait correspondre la couleur A au dessus d'un surface et la couleur B au dessous. On vérifie alors que le fait de relier nos disques avec des bandes twistées est consistant avec le choix de nos couleurs. C'est effectivement le cas, on a donc un algorithme de construction de surface de Seifert. En appliquant cet algorithme à notre nœud de huit on obtient la surface  $S_8$  qui apparaît à la figure 1.8. Une fois cette surface obtenue, il nous faut considérer les générateurs de  $H_1(S_8; \mathbb{Z})$  que l'on note  $x_1$  et  $x_2$  comme l'illustre la figure 1.8. On oriente alors notre surface afin de pouvoir contruire les déplacements positifs  $x_1^+$  et  $x_2^+$ . Une fois tout cela défini il nous reste simplement à évaluer la valeur des différents nombres d'entrelacements.

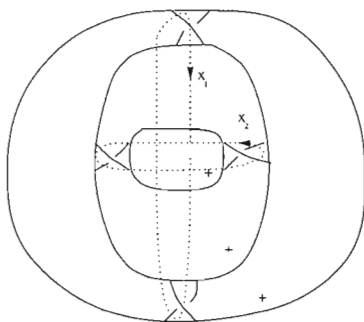


Figure 1.8 Surface obtenue pour le nœud de huit

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi} \quad l_k(x_1, x_1^+) &= -1 \\
l_k(x_1, x_2^+) &= +1 \\
l_k(x_2, x_1^+) &= 0 \\
l_k(x_2, x_2^+) &= +1
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où  $\Delta_K(t) = 3 - (t - t^{-1})$ .

### Groupe fondamental et présentation de Wirtinger

Il s'agit ici de mettre en évidence le fait que la théorie des nœuds puisse être vue comme une partie de la théorie plus générale des 3-variétés. Nous allons pour ce faire présenter en détail la manière de calculer le groupe fondamental d'un nœud.

#### – Groupe fondamental :

**Un chemin**  $\sigma$  dans un espace  $X$  allant de  $x_0 \in X$  à  $x_1 \in X$  est une fonction continue  $\sigma : (I; [0, 1]) \rightarrow (X; x_0, x_1)$ .

On note  $\Omega(X; x_0, x_1) = \{\text{chemins } \sigma : (I; [0, 1]) \rightarrow (X; x_0, x_1)\}$ .

**Un lacet** : est un chemin pour lequel  $x_0 = x_1$ , on pose alors

$$\Omega(X; x_0, x_1) = \Omega(X; x_0).$$

**Homotopes relativement à  $\{0, 1\}$**  : Se dit de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 \in \Omega(X; x_0, x_1)$  pour lesquels il existe  $F : I \times I \rightarrow X$  continue telle que

$$\begin{aligned}
F(s, 0) &= \sigma_0(s) \text{ et } F(0, t) = x_0 \\
F(s, 1) &= \sigma_1(s) \quad F(1, t) = x_1
\end{aligned}$$

F est appelée homotopie relative à  $\{0,1\}$  et l'on note  $\sigma_1 \simeq_F \sigma_2 \text{ rel}\{0,1\}$ .

**Lemme 1** “ $\simeq$ ” est une relation d'équivalence.

**La multiplication des chemins :** est définie par l'opération  $*$  telle que :

$$\begin{aligned}\Omega(X; x_0, x_1) \times \Omega(X; x_1, x_2) &\rightarrow \Omega(X; x_0, x_2) \\ (\sigma, \tau) &\rightarrow \sigma * \tau\end{aligned}$$

Avec

$$\tau * \sigma := \begin{cases} \tau(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tau(1-2s) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

**Le groupe fondamental :** est alors donné par l'opération

$$\pi_1(X; x_0) = \Omega(X; x_0) / \simeq_{\text{rel}\{0,1\}}$$

**L'extérieur du nœud  $K$  dans  $S^3$**  noté  $X_K$  est obtenu à partir du voisinage tubulaire de  $K$  noté  $N(K)$ . Cela signifie que  $N(K)$  peut être vu comme l'image d'un tore solide par un plongement  $p : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$  dont l'âme  $\{0\} \times S^1$  est envoyée sur  $K$ , c'est à dire que  $p(\{0\} \times S^1) = K$ . Ce n'est rien d'autre que la fermeture du complémentaire de  $N(K)$  dans  $S^3$ , ainsi  $X_K = \overline{S^3 \setminus N(K)}$ .

**Le groupe d'un nœud  $K$ ,** noté  $\pi_1(K)$ , est défini comme étant  $\pi_1(X_K)$ .

Afin de calculer le groupe d'un nœud, il nous faut considérer un point  $x_0$  de l'extérieur de ce nœud. On considère ensuite un lacet  $x_i$  d'origine  $x_0$  qui borde un disque  $D_i$  qui intersecte transversalement  $K$  en exactement un point pour chacun des brins  $b_i$  de notre nœud, avec la condition supplémentaire  $l_k(x_i, b_i) = +1$ . Une fois ces lacets considérés, il nous reste à comprendre si il existe des relations entre ces derniers où si nous avons d'ores et déjà caractérisé notre nœud. À partir de la figure 1.10, on comprend bien évidemment que chaque croisement nous donne une relation entre les trois lacets correspondants aux trois brins qui forment ce croisement.

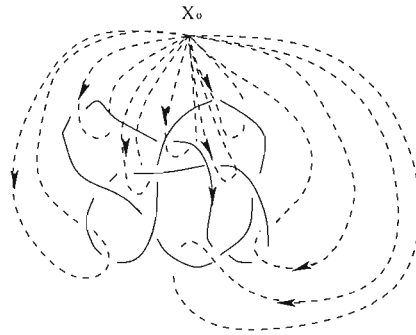


Figure 1.9 Calcul du groupe fondamental pour le nœud  $7_7$

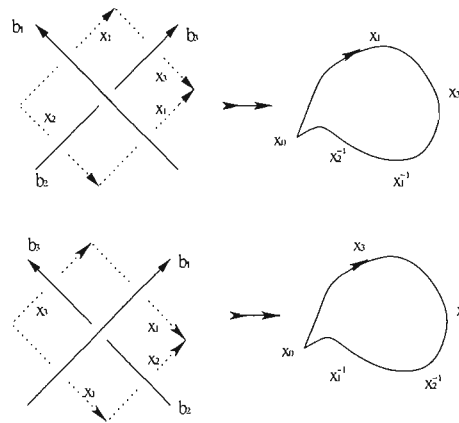


Figure 1.10 Relation entre générateurs de Wirtinger

Il apparait en effet, dans notre premier diagramme, une relation entre les différents générateurs de Wirtinger  $x_1 * x_3 * x_1^{-1} * x_2^{-1} = 1$ . Cette relation apparaît clairement dans le second terme de notre diagramme, on voit effectivement que notre produit est nul-homotope. Le second croisement nous donne quant à lui la relation  $x_3 * x_1 * x_2^{-1} * x_1^{-1} = 1$ . Le fait que les relations de Wirtinger caractérisent notre groupe de nœud n'est pas évident, et pour plus de détails, se référer au chapitre dédié à la présentation de Wirtinger pp. 31-33 (Bur).

On est donc en mesure de calculer le groupe d'un nœud  $\pi_1(K)$  constitué de  $m$  brins et  $n$  croisements en appliquant en chaque croisement le calcul présenté à la figure 1.11. On obtient  $n$  relations du type  $r_c = x_k * x_i * x_k^{-1} * x_j^{-1}$  ou  $r_c^* = x_k^{-1} * x_i * x_k * x_j^{-1}$ . Cette construction nous permet de considérer le groupe d'un nœud comme un groupe isomorphe à :

$$G = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_m; r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$$

Cette forme est appelée **présentation de Wirtinger** pour le nœud  $K$ .

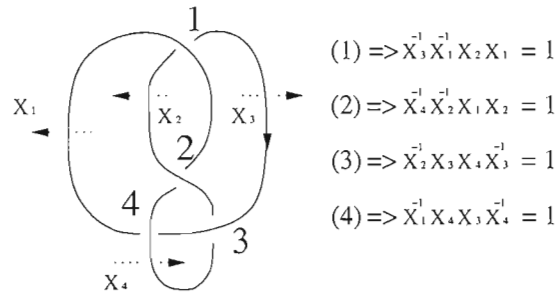


Figure 1.11 Présentation de Wirtinger pour le nœud de huit

Nous présentons à la figure 1.11 l'ensemble du calcul du groupe fondamental d'un nœud de huit noté  $4_1$ . On en déduit la présentation de Wirtinger pour ce nœud.

$$\begin{aligned} \pi_1(S^3 \setminus 4_1) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \quad ; \quad & x_3^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1, x_4^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 \\ & , \quad x_2^{-1} x_3 x_4 x_3^{-1}, x_1^{-1} x_4 x_3 x_4^{-1} \rangle \end{aligned}$$

On remarque qu'il est possible d'exprimer notre quatrième relation à partir des trois autres :

$$\begin{aligned}
 \text{Comme} \quad x_3^{-1}x_1^{-1}x_2x_1 = 1 &\iff x_1^{-1} = x_3^{-1}x_1^{-1}x_2 \\
 \text{et que} \quad x_4^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 = 1 &\iff x_4 = x_2^{-1}x_1x_2 \\
 \text{enfin que} \quad x_2^{-1}x_3x_4x_3^{-1} = 1 &\iff x_2^{-1}x_3 = x_3x_4^{-1} \\
 \text{On a} \quad x_1^{-1}x_4x_3x_4^{-1} &= x_3^{-1}x_1^{-1}x_2x_4x_3x_4^{-1} \\
 &= x_3^{-1}x_1^{-1}x_2x_2^{-1}x_1x_2x_3x_4^{-1} \\
 &= x_3^{-1}x_2x_3x_4^{-1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \pi_1(S^3 \setminus 4_1) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4; x_3^{-1}x_1^{-1}x_2x_1, x_4^{-1}x_2^{-1}x_1x_2, x_2^{-1}x_3x_4x_3^{-1} \rangle$$

**Remarque :** Il est toujours possible d'exprimer une de nos  $m$  relations en fonction des  $m - 1$  autres.

### Revêtement double ramifié le long d'un nœud $K$

Un **revêtement** est une application continue  $p : E \rightarrow B$  si

1.  $E$  est connexe par arcs et non vide.
2.  $\forall b \in B \quad \exists$  un ouvert  $V \subset B$  tel que  $p^{-1}V$  est un ensemble non vide vu comme une union disjointe d'ouverts de  $E$ , chacun étant homéomorphe à  $V$  par  $p$ .

### Construction du revêtement infini cyclique

Cette construction suit le livre de Lickorish (Lic). En considérant un tore solide  $T^2 = S^1 \times D^2$  et son groupe fondamental  $\pi_1(T^2)$ , on définit un méridien pour notre tore comme un lacet homotopiquement trivial qui borde un disque dans  $S^1 \times D^2$  et une longitude comme un second générateur de  $\pi_1(T^2)$ . Un **méridien**  $m$  de  $N(K)$  est un

générateur de  $H_1(K)$  où  $H_1(K) = \pi_1(K)/[a, b]$  avec  $[a, b]$  groupe des commutateurs, vivant dans  $\partial N(K)$ . Une **longitude canonique** est, à isotopie près dans  $N(K)$ , la seule longitude qui est homologiquement triviale dans  $X_K$ .

Soit  $Y$  l'espace obtenu à partir de  $X_K$  en découpant celui-ci le long de  $F$  notre surface de Seifert pour  $K$ . Cela signifie que  $Y$  est l'espace  $X_K \setminus F$  compactifié avec deux copies  $F_-$  et  $F_+$  de  $F$  remplacées à l'endroit où la copie de  $F$  avait été enlevée. On note que  $Y$  est homéomorphe à  $X_K$  privé d'un voisinage ouvert  $F \times (-1, 1)$ . On note aussi que  $X_K$  peut être obtenu de  $Y$  en attachant  $F_+$  et  $F_-$  ensemble, ce qui se traduit par  $X_K = Y/\phi$  où  $\phi$  est l'homéomorphisme naturel  $\phi : F_- \rightarrow F \rightarrow F_+$ . On prend alors un ensemble dénombrable de copies de  $Y$  et on les attache ensemble pour construire notre nouvel espace  $X_\infty$  comme le suggère la figure 1.12.

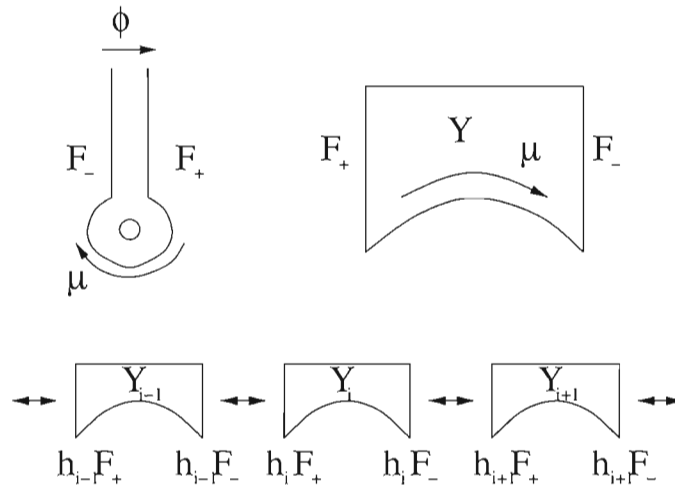


Figure 1.12 Coupe et copie des surfaces de Seifert

Plus précisément soit  $\{Y_i : i \in \mathbb{Z}\}$  des espaces homéomorphes à  $Y$  et soit  $h_i : Y \rightarrow Y_i$  des homéomorphismes. Alors  $X_\infty$  est l'espace formé par l'union disjointe de tout les  $Y_i$  en identifiant  $h_i F_-$  avec  $h_{i+1} F_+$ , c'est à dire en utilisant les applications collantes suivantes  $h_{i+1} \circ \phi \circ h_i$ .



### Ramification le long du nœud $K$ :

D'après la construction de  $X_\infty$ , il est clair qu'il est possible de relever un lacet  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  en un lacet  $\hat{\alpha}$  dans  $X_\infty$  lorsque  $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1)$  sont dans une même copie de  $Y$  ( $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1)$ ). Par construction,  $X_\infty \rightarrow X$  est un revêtement régulier cyclique infini qui correspond à un homomorphisme surjectif,  $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Comme  $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ , il y a un unique homomorphisme (à multiplication par -1 près) qui est donné par  $\alpha \rightarrow l_k(\alpha, K) = \alpha \cdot [K]$ . On en déduit que dans le cas où  $\alpha$  n'intersecte algébriquement pas  $F$ ,  $\hat{\alpha}$  est un lacet dans  $X_\infty$ . On peut réexprimer cette condition en disant que  $\alpha$  peut être relevé en un lacet  $\hat{\alpha}$  si et seulement si le nombre d'entrelacement  $l_k(\alpha, K) = 0$ .

Soit  $X_\infty \rightarrow X_K$  le revêtement cyclique infini de l'extérieur du nœud  $K$ . On fait agir le groupe cyclique  $\langle t \rangle$  sur  $X_\infty$ . Alors  $X_\infty / \langle t^2 \rangle \rightarrow X_K$  est un revêtement à deux feuilles de  $X_K$  et on note  $\hat{X}_2 = X_\infty / \langle t^2 \rangle$ .

On remarque que  $\hat{X}_2$  est obtenu en attachant deux copies de  $Y$  le long de leur bord de la manière précédemment évoquée. Un lacet dans  $X_K$  relève donc un lacet dans  $\hat{X}_2$  si et seulement si son nombre d'entrelacement  $l_k(\alpha, K) \equiv 0 \pmod{2}$ . On en déduit qu'une longitude canonique est relevée en un lacet dans  $\hat{X}_2$  alors qu'un méridien ne l'est pas. On peut, par contre, relever le carré de ce méridien afin que l'image obtenue par le relèvement de celui-ci s'avère être un lacet. Considérons un lacet appartenant à la frontière d'un voisinage  $N(K)$  d'un nœud  $K$ . En identifiant  $\partial N(K)$  avec  $S^1 \times S^1$  et en prenant pour longitude et méridien de ce tore les générateurs de chacun des facteurs  $S^1$ , notre revêtement restreint à  $\partial N(K)$  est alors le revêtement d'un tore par un tore. Celui-ci équivaut à  $(z_1, z_2) \rightarrow (z_1, z_2^2)$ . On peut étendre cette application à  $S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2 : (z_1, z_2) \rightarrow (z_1, z_2^2)$ . On note que cette application est un revêtement excepté pour  $S^1 \times \{0\}$ . On parle alors de revêtement ramifié sur  $S^1 \times \{0\}$ . On peut donc attacher un tore solide à  $\hat{X}_2$  le long de son bord pour créer  $X_2$  et faire la même chose pour  $X$  est recréer alors  $S^3$ .

On étend de cette manière notre revêtement double  $\hat{X}_2 \rightarrow X$  à un revêtement  $X_2 \rightarrow X$

que l'on nomme **revêtement double de  $S^3$  ramifié le long de  $K$** .

### Polynôme d'Alexander et revêtement double ramifié

On rappelle quelques définitions élémentaires de topologie algébrique qui proviennent pour l'essentielle de (Mas) :

**Une suite est exacte** si pour trois groupes  $A, B, C$  et deux homomorphismes  $\rho : A \rightarrow B$  et  $\tau : B \rightarrow C$ , on a  $A \xrightarrow{\rho} B \xrightarrow{\tau} C$  avec  $\text{Im}(\rho) = \ker(\tau)$ .

**Suite de Mayer-Vietoris** : Soit  $A$  et  $B$  des sous ensembles de l'espace topologique  $X$  tel que  $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ , il est alors possible de définir des homomorphismes naturels :

$$\Delta : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$$

pour toutes les valeurs de  $n$  telles que la suite suivante soit exacte :

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} \dots$$

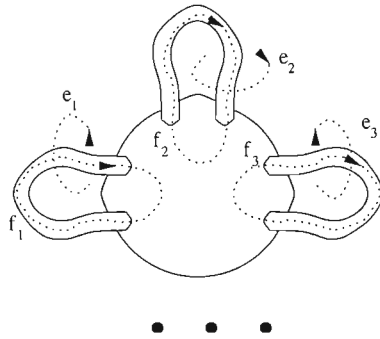
Si  $A \cap B \neq \emptyset$  cette suite reste exacte en substituant notre groupe d'homologie réduite pour un groupe d'homologie ordinaire de dimension 0.

Soit  $R$  un anneau commutatif. **Une matrice de représentation** pour  $M$  est obtenue à partir d'une présentation finie pour  $M$  comme  $R$ -module, qui est une suite exacte  $F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$  avec  $E$  et  $F$  des  $R$ -modules libres avec bases finies. Si  $\alpha$  est représenté par la matrice  $A$  qui respecte  $\{[e_i]\}$  et  $\{[f_i]\}$  de  $E$  et  $F$  (c'est à dire que  $\alpha f_i = \sum_j A_{ji} e_j$ ) alors  $A$  est notre matrice de représentation pour  $M$ .

### Complément sur les matrices de Seifert :

Prenons  $F$  une surface de Seifert, d'un entrelacs  $L$  à  $n$  composantes de bord, plongée dans  $S^3$ . On pose notre premier groupe d'homologie pour cette surface  $H_1(F; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z}$  généré par  $\{[f_i]\}$ . En visualisant  $F$  comme étant un disque auquel sont attachées des 1-anses, on définit  $\{[f_i]\}$ , les boucles constituées par une courbe correspondant à l'intérieur d'une 1-anse (image de  $\{1/2\} \times [0, 1]$  par notre application collante) complétée par une courbe incluse dans le disque. Soit  $V$  un voisinage régulier de  $F$  dans  $S^3$  tel que  $V$  soit simplement une 3-boule avec  $(2g+n-1)$  1-anses attachées. L'inclusion de  $F$  dans  $V$  est une équivalence d'homotopie, et  $H_1(\partial V; \mathbb{Z}) = (\bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z}) \oplus (\bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z})$ . On définit alors les générateurs suivants  $\{[f'_i] : 1 \leq i \leq 2g+n-1\}$  et  $\{[e_i] : 1 \leq i \leq 2g+n-1\}$  où les générateurs  $\{[e_i]\}$  sont pris de manière à border un disque pour chacune de 1-anses  $A_i$  où  $A_i \simeq [0, 1] \times D^2$ . On veut de plus que chacun des  $\{[e_i]\}$  rencontre  $\{[f_i]\}$  en un point et que l'inclusion  $\partial V \subset V$  induit une application au niveau de l'homologie envoyant  $\{[f'_i]\}$  vers  $\{[f_i]\}$  et  $\{[e_i]\}$  vers 0. On choisit de plus une orientation pour  $\{[e_i]\}$  de manière à ce que  $l_k(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ .

On illustre cette construction de la manière suivante :



Le corps à anses ci-contre correspond à  $V$ , voisinage régulier de notre surface de Seifert. Apparaissent sur ce diagramme les générateurs du premier groupe d'homologie du bord de  $V$ .

Figure 1.13 Corps à anses

Afin de comprendre la preuve du théorème 4 qui suit, nous allons redéfinir une matrice de Seifert . On peut en effet associer à chaque surface de Seifert  $F$  d'un nœud  $K$  une forme de Seifert  $\alpha$ . Pour ce faire nous allons commencer par définir la forme  $\beta$  :

$$\beta : H_1(S^3 \setminus F; \mathbb{Z}) \times H_1(F; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

qui a la propriété  $\beta([c], [d]) = l_k(c, d)$  pour toutes courbes simples fermées orientées  $c$  et  $d$  dans  $S^3 \setminus F$  et  $F$  respectivement.

$$\text{Alors } \alpha : H_1(F; \mathbb{Z}) \times H_1(F; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \rightarrow \beta(i_*^-(x), y) \text{ avec } i_*^\pm(x) = x \times \pm 1$$

On note que  $\alpha$  est bien définie et bilinéaire, et si  $a$  et  $b$  sont deux courbes simples fermées orientées dans  $F$ , alors  $\alpha([a], [b]) = l_k(a^-, b)$ . De plus, par un déplacement positif et en respectant la seconde coordonnée de  $F \times [-1, 1]$ , on obtient  $l_k(a, b^+)$ . En prenant une base  $\{[f_i]\}$  pour  $H_1(F; \mathbb{Z})$  et une base  $\beta$ -duale  $\{e_i\}$  pour  $H_1(S^3 \setminus F; \mathbb{Z})$  alors  $\alpha$  est représentée par la **matrice de Seifert**  $A$  telle que :

$$A_{ij} = \alpha([f_i], [f_j]) = l_k(f_i^-, f_j) = l_k(f_i, f_j^+).$$

**Théorème 4** Soit  $F$  une surface de Seifert pour un entrelacs orienté  $L \subset S^3$  et soit  $A$  sa matrice de Seifert. Alors  $tA - A^T$  est une matrice qui représente le  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$  - module  $H_1(X_\infty; \mathbb{Z})$ .

**Preuve :** On exprime  $X_\infty$  comme étant l'union de sous-espaces  $Y'$  et  $Y''$ , où  $Y' = \cup_i Y_{2i+1}$  et  $Y'' = \cup_i Y_{2i}$ . Chacun de ces sous espaces et l'union disjointe d'un nombre dénombrable de copies de  $F$ . On va calculer l'homologie de  $X_\infty$  en utilisant le théorème de Mayer-Vietoris, c'est à dire à partir du calcul du premier groupe d'homologie de  $Y'$  et  $Y''$ . On se concentre donc sur la courte suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow C_n(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_n} C_n(Y') \oplus C_n(Y'') \xrightarrow{\beta_n} C_n(X_\infty) \rightarrow 0$$

Ici  $C_n$  représente le  $n^{\text{ème}}$  groupe de chaîne. On définit de plus  $\beta_n(a, b) = a + b$  et pour  $x \in C_n(Y_{i-1} \cap Y_i)$ ,  $\alpha_n(x) = (-x, x) \in C_n(Y_{i-1}) \oplus C_n(Y_i)$ . Cette courte suite exacte nous donne la longue suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} \rightarrow H_1(Y' \cap Y'') &\xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y') \oplus H_1(Y'') \xrightarrow{\beta_*} H_1(\hat{X}_\infty) \\ \rightarrow H_0(Y' \cap Y'') &\xrightarrow{\alpha_*} H_0(Y') \oplus H_0(Y''). \end{aligned}$$

À présent, comme par définition la surface de Seifert  $F$  est connexe, on trouve que  $H_0(F; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . De plus, on a défini  $Y' \cap Y''$  comme étant un nombre dénombrable de copies de  $F$  et on passe d'une copie à l'autre par l'homéomorphisme  $t$ . On en déduit que  $H_0(Y' \cap Y'', \mathbb{Z})$  est constitué d'une copie de  $\mathbb{Z}$  pour chaque puissance de  $t$ . Ainsi  $H_0(Y' \cap Y'', \mathbb{Z})$  peut être identifié à  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t] \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(F; \mathbb{Z})$  avec le générateur de  $H_0(Y_0 \cap Y_1; \mathbb{Z})$  correspondant à  $1 \otimes 1$ .

De plus  $H_0(Y'; \mathbb{Z}) \oplus H_0(Y''; \mathbb{Z})$  peut être considéré comme la somme directe d'un ensemble dénombrable de copies de  $H_0(Y_0; \mathbb{Z})$ , et peut donc être identifié à  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t] \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(Y; \mathbb{Z})$  avec le générateur de  $H_0(Y_0; \mathbb{Z})$  correspondant à  $1 \otimes 1$ . On a alors que  $\alpha_*(1 \otimes 1) = -(1 \otimes 1) + (t \otimes 1)$ . On en déduit que sur  $H_0(Y' \cap Y'', \mathbb{Z})$ ,  $\alpha_*$  est injective et donc que  $\beta_*$  est surjective.

On applique le même raisonnement pour le premier groupe d'homologie et on identifie de la même manière  $H_1(Y' \cap Y'', \mathbb{Z})$  à  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t] \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(F; \mathbb{Z})$  tel que  $x \in H_1(Y_0 \cap Y_1; \mathbb{Z})$  corresponde à  $1 \otimes x$ . De la même façon on identifie  $H_1(Y'; \mathbb{Z}) \oplus H_1(Y''; \mathbb{Z})$  avec  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t] \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(Y; \mathbb{Z})$  tel que  $y \in H_1(Y_0)$  correspondent à  $1 \otimes y$ . Alors  $H_1(Y' \cap Y'', \mathbb{Z})$  a une base  $\{1 \otimes [f_i]\}$  et  $H_1(Y'; \mathbb{Z}) \oplus H_1(Y''; \mathbb{Z})$  a une base  $\{1 \otimes [e_i]\}$ . Ainsi, la définition de  $\alpha_*$  nous donne :

$$\alpha_*(1 \otimes [f_i]) = \sum_j (-A_{ij}(1 \otimes [e_j]) + A_{ji}(t \otimes [e_j]))$$

On en déduit que  $\alpha_*$  est représentée par la matrice  $tA - A^T$  et comme  $\beta_*$  est surjective cette même matrice correspond par définition à la matrice de présentation de  $H_1(X_\infty; \mathbb{Z})$ . CQFD

**Théorème 5** *Soit  $X_2$  le revêtement double de  $S^3$  ramifié le long d'un nœud  $K$  et supposons que  $A$  soit une matrice de Seifert pour  $K$  avec une orientation et une surface de Seifert donnée. Alors  $H_1(X_2)$  est présenté, comme groupe abélien, par la matrice  $(A + A^T)$ .*

**Preuve :** On prend  $\hat{X}_2 = Y_0 \cup Y_1$ , où  $Y_0 \cap Y_1$  est l'ensemble de deux copies disjointes de  $F$ . On peut obtenir la suite exacte suivante à partir de Mayer-Vietoris :

$$\begin{aligned} \rightarrow H_1(Y_0 \cap Y_1) &\xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y_0) \oplus H_1(Y_1) \xrightarrow{\beta_*} H_1(\hat{X}_2) \\ \rightarrow H_0(Y_0 \cap Y_1) &\xrightarrow{\alpha_*} H_0(Y_0) \oplus H_0(Y_1). \end{aligned}$$

On considère l'homéomorphisme  $t : \hat{X}_2 \rightarrow \hat{X}_2$  avec  $t^2 = 1$  qui interchange  $Y_0$  et  $Y_1$ . On peut prendre une base  $\{[f_i]\}$  pour  $H_1(F)$  qui correspond à une matrice de Seifert  $A$  et une base duale  $\{[e_i]\}$  pour  $H_1(Y)$ . En la transférant à  $\hat{X}_2$  on obtient une base  $\{[f_i]\} \cup \{[tf_i]\}$  pour  $H_1(Y_0 \cap Y_1)$  ( car  $Y_0 \cap Y_1$  sont deux copies de  $F$ ). On a effectivement une base  $\{[e_i]\}$  pour  $H_1(Y_0)$  et une base  $\{te_i\}$  pour  $H_1(Y_1)$ . À partir de ces bases,  $\alpha_*$  est représentée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -A & A^T \\ A^T & -A \end{pmatrix}$$

En considérant le même raisonnement avec  $H_0(Y_0 \cap Y_1) \rightarrow H_0(Y_0) \oplus H_0(Y_1)$ , on déduit que cette application est représentée par :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc le fait que le noyau de cette application est une copie de  $\mathbb{Z}$  puisque la suite que l'on utilise est exacte et que tout lacet de  $\hat{X}^2$  qui passe par chacune des deux composantes de  $Y_0 \cap Y_1$  est envoyé sur le générateur d'une copie de  $\mathbb{Z}$ .

On suppose  $[c_i]$  une courbe fermée de  $K$  dans  $\hat{X}_2$  tel que le carré de celle-ci soit envoyé sur un méridien de  $K$ . Alors  $H_1(X_2)$  est obtenu de  $H_1(\hat{X}_2)$  en ramenant  $[c_i]$  à zéro. Considérons le genre  $g$  de la surface de Seifert avec nos courbes  $\{[f_i]\}$  habituelles. Le bord de notre surface étant  $K$ , la relation  $[c_i] = 0$  fait simplement disparaître de  $H_1(\hat{X}_2)$  la copie de  $\mathbb{Z}$  mentionnée plus haut. Afin de calculer  $H_1(X_2)$  il nous faut aussi ajouter la condition selon laquelle  $[c_i] = [c_1] \forall i \geq 2$ . Ainsi, pour  $i \geq 2$  la courbe  $e_{2g+i-1}$  dans  $Y$  qui entoure une bande de  $F$  et peut être regardée comme appartenant à l'extérieur de  $K$ , représente la différence entre le premier et le  $i^{\text{ème}}$  méridien de  $K$ . L'élément  $e_{2g+i-1} \oplus te_{2g+i-1} \in H_1(Y_0) \oplus H_1(Y_1)$  est donc envoyé par  $\beta_*$ , sur la différence entre  $[c_i]$  et  $[c_1]$  dans  $H_1(\hat{X}_2)$ . Cela signifie que  $H_1(X_2)$  a pour représentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} -A & A^T & B \\ A^T & -A & B \end{pmatrix}$$

avec  $B$  la matrice  $(2g + n - 1) \times (n - 1)$   $\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$  avec  $I$  matrice identité. Par une série d'opérations admissibles d'équivalence de matrices (résultat qui vient de (Lic) p. 49), il est possible de se ramener par stabilisation à

$$\begin{pmatrix} -A & -A + A^T + (0 \oplus B) & B \\ A + A^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut éliminer ensuite la première ligne et on obtient la présentation de  $H_1(X_2)$  :  
 $(A + A^T)$ . CQFD

**Corollaire 2** *Soit  $X_2$  le revêtement double de  $S^3$  ramifié le long d'un nœud. L'ordre du groupe  $H_1(X_2)$  est le module du déterminant de  $(A + A^T)$ , c'est à dire :*

$$|H_1(X_2)| = |\det(A + A^T)| = |\Delta_L(-1)|$$

**Preuve :** On rappelle que tout groupe abélien finiment engendré peut être exprimé comme une somme directe de groupe cyclique. Ainsi notre  $H_1(X_2)$  a une présentation matricielle sous forme diagonale dans laquelle les entrées sont les ordres de nos groupes cycliques intervenant dans la somme directe. Le déterminant de cette matrice carrée nous donne effectivement l'ordre de notre groupe d'homologie. Enfin, par définition de notre polynôme d'Alexander, on a notre relation  $|\Delta_K(-1)| = |\det(A + A^T)| = |H_1(X_2)|$ . CQFD



## CHAPITRE II

### ESPACES DE REPRÉSENTATIONS ET GROUPE DE NOEUD

#### 2.1 Le groupe $SU(2)$

Le groupe de Lie  $SU(2)$  est constitué de toutes les matrices  $A$  complexes  $2 \times 2$  telles que  $A\bar{A}^T = I$ . Topologiquement, on peut identifier ce groupe avec  $S^3$ . En effet, soit  $A \in SU(2)$  une matrice inversible, alors la condition  $A\bar{A}^T = I$  nous donne  $A^{-1} = \bar{A}^T$ . En posant :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} \text{ alors } \bar{A}^T = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{u} \\ \bar{b} & \bar{v} \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} v & -b \\ -u & a \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $v = \bar{a}$  et  $u = -\bar{b}$ . Ainsi  $A \in SU(2)$  est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{C}, \text{ et } \det A = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

On obtient donc notre identification :

$$SU(2) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\} = S^3$$

On peut aussi voir que notre groupe  $SU(2)$  peut être identifié au groupe de Lie des quaternions unitaires  $Sp(1)$ . Soit  $q = x + yi + zj + wk \in \mathbb{H}$  un quaternion, sa norme  $|q|$  est donnée par la formule  $|q|^2 = q\bar{q} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$  avec  $\bar{q} = x - yi - zj - wk$ .

On rappelle l'égalité  $|pq| = |p| |q|$ . Le groupe  $\text{Sp}(1)$  est constitué des quaternions  $q$  tels que  $|q| = 1$ .

Comme  $|x + yi + zj + wk|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ ;  $\text{Sp}(1)$  est topologiquement la 3-sphère que nous connaissons. On peut de plus identifier  $\text{Sp}(1)$  à  $SU(2)$  en considérant l'application :

$$a + bj \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Les quaternions unitaires  $1, i, j, k$  sont alors identifiés respectivement aux matrices ;

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $U(1) = S^1$  le groupe des nombres complexes unitaires. À partir de notre application entre  $\text{Sp}(1)$  et  $SU(2)$  on déduit l'inclusion suivante de  $U(1) \rightarrow SU(2)$  définie par :

$$e^{i\phi} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

On rappelle que  $q$  étant unitaire, il est possible d'exprimer ce quaternion, sans perdre de généralité, sous la forme :

$$q = \cos \theta + \sin \theta (ai + bj + ck) \text{ avec } a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

**Proposition 1** *Le groupe  $U(1) \subset SU(2)$  est un sous groupe commutatif maximal dans  $SU(2)$ . Tout autre sous-groupe commutatif maximal de  $SU(2)$  est de la forme  $C^{-1}.U(1).C$  où  $C \in SU(2)$ .*

On rappelle que la trace d'une matrice  $A \in SU(2)$  est définie par une fonction  $tr : SU(2) \rightarrow [-2, 2], A \rightarrow a_{11} + a_{22}$ . On remarque aussi que les deux seules matrices ayant comme trace  $\pm 2$  sont  $+I$  et  $-I$  et que tout autre élément de  $SU(2)$  satisfait la relation  $-2 < tr A < 2$ .

**Proposition 2** Deux matrices  $A$  et  $A' \in SU(2)$  sont conjuguées si et seulement si  $tr A = tr A'$ .

**Preuve :** ( $\Rightarrow$ ) si  $A$  et  $A'$  sont conjuguées alors  $tr A = tr(C \cdot A' \cdot C^{-1}) \Leftrightarrow tr A = tr(A \cdot C \cdot C^{-1}) \Leftrightarrow tr A = tr A'$ .

( $\Leftarrow$ ) on voit  $A$  comme un opérateur linéaire agissant sur l'espace  $\mathbb{C}^2$ . Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos,  $A$  est un espace propre avec valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On se donne un vecteur unitaire  $\Phi = (x, y)^T$  de cet espace propre et on pose :

$$C = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & +\bar{x} \end{pmatrix} \in SU(2) \text{ ainsi } C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi$$

Alors

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}A\Phi = C^{-1}\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de valeur propre  $\lambda$ .

La condition ci-dessus nous permet de déduire que, pour  $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

On a  $\alpha = \lambda$  et  $\gamma = 0$ . Ainsi  $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$   $\beta, \delta \in \mathbb{C}$ .

De plus  $C^{-1}AC \in SU(2) \Rightarrow C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$  et  $\det(C^{-1}AC) = |\lambda|^2 = 1$ .

Cela nous permet de conclure que toutes matrices  $A \in SU(2)$  peut être conjuguée à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$  avec  $tr A = 2 \cos \phi$ .

On obtient donc  $\frac{\text{tr}(C^{-1}AC)}{2} = \frac{\text{tr}(A)}{2} = \cos \phi$ , ce qui détermine notre angle  $\phi$  au signe près. Comme de plus :

$$\begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

deux matrices dont les traces respectives ont des signes opposés, sont conjuguées. Ainsi  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A') \Rightarrow A$  et  $A'$  sont conjuguées. CQFD

En terme de quaternions, ce théorème dit que tout quaternion  $q$  unitaire est conjugué à un nombre complexe  $e^{i\phi}$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ . On en déduit que les classes de conjugaisons de  $SU(2)$  sont en bijection avec l'ensemble  $\text{tr}^{-1}(c)$  où  $-2 < c < 2$ .

De plus ,  $\text{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = c \Leftrightarrow 2\Re\{a\} = c$ .

Or  $\text{tr}^{-1}(c) = SU(2) \cap \{\frac{c}{2}, \alpha, \beta, \gamma : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ .

En considérant  $SU(2)$  comme  $S^3$ , on obtient que  $\text{tr}^{-1}(c) \cong S^2$  avec  $c \in (-2, 2)$ . On a aussi  $\text{tr}^{-1}(-2) = \{-I\}$ , et  $\text{tr}^{-1}(2) = \{I\}$ .

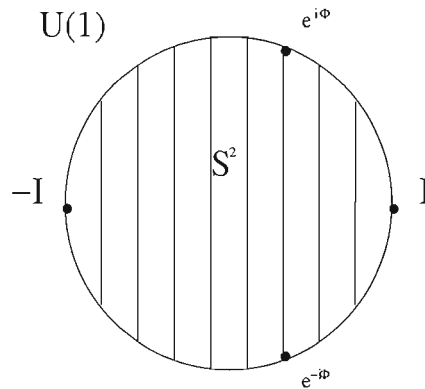


Figure 2.1 Représentation schématique de  $SU(2)$

On peut représenter schématiquement notre groupe  $SU(2)$  comme le montre la figure 2.1

dans laquelle les classes de conjugaison  $S^2$  sont les segments verticaux. On voit aussi que deux éléments conjugués de  $U(1)$  sont dans la même classe de conjugaison. Chaque copie de  $S^2$  intersecte d'ailleurs  $U(1)$  en exactement deux points sauf dans le cas où  $e^{i\phi} = \pm 1$ .

## 2.2 Quaternions et rotations

On identifie  $\mathbb{R}^3$  avec les quaternions purs. Prenons un quaternion  $s$  de norme 1 et  $h$  un quaternion pur et posons :

$$\rho(s) \cdot h = sh\bar{s}$$

On a alors que

$$\begin{aligned} \rho(s) \cdot h + \overline{\rho(s) \cdot h} &= sh\bar{s} + \overline{sh\bar{s}} \\ &= sh\bar{s} + \bar{s}\bar{h}s \\ &= s(h + \bar{h})\bar{s} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui fait de  $\rho s \cdot h$  un imaginaire pur.

On a aussi le fait que  $\forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}^3$ , notre application  $\rho$  est linéaire puisque  $\rho(h_1 + h_2) = s(h_1 + h_2)\bar{s} = sh_1\bar{s} + sh_2\bar{s} = \rho(h_1) + \rho(h_2)$ . On peut aussi vérifier que  $\langle \rho(s)h, \rho(s)h \rangle = \langle h, h \rangle$ , ce que prouve le calcul suivant,  $\langle \rho(s)h, \rho(s)h \rangle = \|\rho(s)h\|^2 = sh\bar{s}s\bar{h}\bar{s} = sh\bar{h}\bar{s} = s\|h\|^2\bar{s} = \|h\|^2s\bar{s} = \langle h, h \rangle$ .

Cela implique que la matrice de représentation de notre transformation linéaire  $\rho(s)$  est élément de  $O(3)$ .

On utilise à présent le fait que  $S^3 \xrightarrow{\rho} O(3) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$  soit continue pour en déduire que  $\det \circ \rho$  envoie un ensemble connexe sur un ensemble connexe. Comme  $\det \rho(s) = \pm 1$ , et que  $s$  parcourt un espace connexe,  $S^3$  est envoyé sur un connexe de  $\{-1\} \cup \{1\}$ . Enfin, comme  $1 \in S^3$  on en déduit que  $\rho : S^3 \rightarrow SO(3)$ .

On montre aussi que  $\forall s_1, s_2 \in S^3$  et  $\forall h \in \mathbb{R}^3$  on a  $\rho(s_1) \circ \rho(s_2) \cdot h = \rho(s_1)s_2h\bar{s}_2 = s_1s_2h\bar{s}_2\bar{s}_1 = s_1s_2h\overline{\bar{s}_1\bar{s}_2} = \rho(s_1s_2)(h)$ . C'est à dire que  $\rho(s_1) \circ \rho(s_2) = \rho(s_1s_2)$ . On évalue

la différentielle de  $\rho$  en  $1 \in S^3$  en prenant

$t \in \mathbb{R}$  et  $v \in S^3$ . Alors

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(1 + t.v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (1 + tv)h(\overline{1 + tv}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h + ht\bar{v} + tvh + t^2vh\bar{v} \\ &= h\bar{v} + vh \end{aligned}$$

Étant donné que  $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$  est une norme et que  $\|q_1\| \cdot \|q_2\| = \|q_1q_2\|$  on a  $\forall h \in \mathbb{R}^3 \ \|h\bar{v} + vh\| = \|v(\bar{v}h\bar{v} + h)\|$  donc  $\|h\bar{v} + vh\| = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0$ . On en déduit que  $T_e\rho$  est injective. La surjectivité s'obtient par calcul direct et on a donc la bijectivité de notre application différentielle de  $\rho$  en 1.

**Proposition 3 :** Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés de dimensions respectives  $m$  et  $n$ ,  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse, et  $x \in X$ . Si  $T_x f$  est bijective, il existe un ouvert  $U$  contenant  $x$  tel que  $f|_U$  soit un difféomorphisme sur  $f(U)$ .

Ce résultat est démontré, entre autre, p. 66 de (Laf).

En appliquant le théorème d'inversion locale à notre problème, on en conclut que  $\rho$  est un difféomorphisme local. Comme  $\text{im}(\rho)$  est connexe et que  $\text{im}(\rho) \subset SO(3)$ , on a un sous ensemble non vide à la fois ouvert et fermé de  $SO(3)$ . Cela prouve que  $\rho$  est surjective. On calcule le noyau de  $\rho$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \ker \rho &= \{s | \rho(s) = Id_{SO(3)}\} \\ \forall h \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \ker \rho &= \{s | \rho(s)h = Id_{SO(3)}h\} \\ \Leftrightarrow \ker \rho &= \{s | sh\bar{s} = h\} \\ \Leftrightarrow \ker \rho &= \{s | sh = hs\} \\ \Leftrightarrow \ker \rho &= \{s | s = \pm 1\} \end{aligned}$$

En effet  $+1$  et  $-1$  sont les seuls éléments qui commutent  $\forall h \in \mathbb{R}^3$ . On obtient que  $S^3/(\pm 1) \cong SU(2)/(\pm 1) \cong SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ . On veut regarder maintenant notre appli-

cation  $\rho(s)$  comme une rotation dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  et la caractériser. On cherche tout d'abord à déterminer l'axe de rotation de cette équation, or en considérant  $s = \Re(s) + \sigma$  on trouve

$$\begin{aligned}\rho(s)\sigma = \rho(\Re(s) + \sigma)\sigma &= (\Re(s) + \sigma)\sigma\overline{(\Re(s) + \sigma)} \\ &= (\Re(s)\sigma + \sigma^2)(\Re(s) - \sigma) \\ &= \sigma(\Re(s) + \sigma)(\Re(s) - \sigma) \\ &= \sigma s\bar{s} = \sigma.\end{aligned}$$

On a ainsi montré que la partie imaginaire de notre quaternion correspond à l'axe de notre rotation. Afin de définir l'angle de notre rotation on commence par montrer que deux rotations conjuguées ont même angle. Soient  $A$  et  $B$  les deux matrices représentant ces rotations alors, par l'entremise d'une matrice  $P$  de changement de base on trouve :

$$\exists P \text{ tel que } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

En considérant le fait que  $B = CAC^{-1}$  on trouve notre matrice de changement de base  $CP$  pour  $B$  ce qui permet de conclure. On rappelle que l'action de  $SO(3)$  sur  $\mathbb{R}^3$  est **transitive**, c'est à dire que pour deux points  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}^3$  il existe  $A \in SO(3)$  tel que  $x_1 = A \cdot x_2$ . En se donnant  $\iota \in \mathbb{C}$  et un quaternion pur  $t$  de norme 1, on a donc l'existence de  $A \in SO(3)$  tel que  $At = \iota$ , et de part la surjectivité de  $\rho$ , on a l'existence d'un quaternion  $q$  de norme 1 tel que  $qt\bar{q} = \iota$ . Comme tout quaternion  $s$  de norme 1 peut s'écrire sous la forme  $s = \alpha + \beta t$ , avec  $t$  pur de norme 1 et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , on peut, à conjugaison près dans  $\mathbb{H}$ , considérer que  $s = \alpha + \iota\beta$ . L'axe de rotation est alors porté par  $i$  et on a simplement à calculer le transformé d'un vecteur orthogonal, disons  $j$ . On trouve

$$\begin{aligned}\rho(s)j &= (\alpha + \iota\beta)j(\alpha - \iota\beta) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)j + 2\alpha\beta k\end{aligned}$$

En conséquence de quoi on peut dire que pour un quaternion  $q \in S^3$  sous la forme  $q = \cos(\theta) + \sin(\theta)(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$  avec  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , on a  $\rho(q)$  rotation d'axe  $(a, b, c)$  et d'angle  $2\theta$ .

## 2.3 Espaces de Représentations

Soit  $\Gamma$  un groupe fini avec la présentation suivante :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{x_1, x_2, \dots, x_n : w_1, w_2, \dots, w_m\} \\ R(\Gamma) &= \text{Hom}(\Gamma, S^3) \\ S(\Gamma) &= \{\rho \in R(\Gamma) \mid \text{im}(\rho) \text{ est abélien}\} \\ \hat{R}(\Gamma) &= (R(\Gamma) - S(\Gamma))/SO(3)\end{aligned}$$

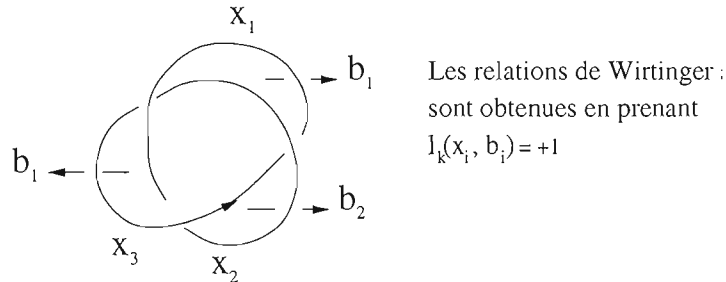
A l'aide de la preuve précédente, et en prenant  $w \in S^3$ , où  $w = \cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)(a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}) = \cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)\tilde{w}$  (avec  $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$ ), on peut considérer que  $\forall A \in SO(3) \exists$  deux  $q \in S^3$  tel que  $A \cdot \tilde{w} = q\tilde{w}q^{-1}$ . On définit à présent la fonction  $C_q : S^3 \rightarrow S^3$  où  $C_q(w) = qwq^{-1}$ .

Cette fonction laisse invariante la partie réelle de notre quaternion  $\Re(w)$ . On définit aussi  $\Sigma(t) = \{q \in S^3 \mid 2t = \text{tr}(q)\}$ , alors d'après la définition de la fonction  $\rho$  précédemment évoquée on a  $C_q(\Sigma(t)) = \Sigma(t)$ . Étant donné que  $\Sigma(t) \cong S^2$  on peut voir  $C_q$  avec  $q = \cos(\theta) + \sin(\theta)(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$  avec  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  comme une rotation autour de l'axe  $\text{Im}(q)$  d'angle  $2\theta$  laissant invariant la coordonnée située sur le grand cercle  $U(1)$ .

Si on fixe  $a, b, c$  pendant que l'on fait varier  $\theta \in \mathbb{R}$  on obtient un sous groupe  $S_q^1 \subset S^3$  où  $S_q^1 = \{\cos(\theta) + \sin(\theta)(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) : \theta \in \mathbb{R}\}$ . On trouve alors que  $\{S_q^1 \cap \Sigma t\} = \{\cos(\theta_t) + \sin(\theta_t)(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \cup \{\cos(\theta_t) - \sin(\theta_t)(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})\}$ . Ce qui définit notre axe de rotation dans  $S^3$ .



### Représentations du noeud de trèfle



On a donc  $\pi_1(S^3 \setminus \text{trèfle}) = \langle b_1, b_2, b_3 ; b_3 b_1 b_3^{-1} b_2^{-1}, b_1 b_2 b_1^{-1} b_3^{-1} \rangle$ .

Pour calculer notre groupe on a trouvé nos trois relations et notre troisième relation pouvait s'exprimer en fonction des deux autres. On cherche l'espace de représentations de ce groupe noté  $\hat{R}(\pi_1(S^3 \setminus \text{trèfle}))$ .

Tout d'abord, en prenant  $\rho \in R(\Gamma)$  alors pour  $\rho(b_1)\rho(b_2) = \rho(b_2)\rho(b_1) \Rightarrow \rho(b_1 b_2 b_1^{-1} b_3^{-1}) = \rho(b_2)\rho(b_1)\rho(b_1)^{-1}\rho(b_3)^{-1}$  et donc  $\rho(b_2) = \rho(b_3)$ . Notre première relation nous permet de conclure sur le fait que  $\rho(b_1)\rho(b_2) = \rho(b_2)\rho(b_1) \Leftrightarrow \rho \in S(\Gamma)$ . On en déduit aussi que  $\rho \in S(\Gamma) \Rightarrow \rho(b_1) = \rho(b_2) = \rho(b_3)$ .

Étant donné que  $b_2$  et  $b_3$  sont conjugués, on a  $\rho(b_2)$  et  $\rho(b_3)$  qui se situent sur la même 2-sphère  $\Sigma(t)$ . Comme de plus  $\rho(b_1)$  et  $\rho(b_2)$  sont conjugués, on a  $\rho(b_1)$  et  $\rho(b_2)$  qui se situent sur cette même 2-sphère  $\Sigma(t)$ . Or, à conjugaison près, il est possible de considérer que  $\rho(b_1)$  et  $\rho(b_2)$  sont déterminés par deux paramètres réels ; leur partie réelle  $t$  et leur angle  $\alpha$  de séparation sur la 2-sphère  $\Sigma(t)$  où  $-1 \leq t \leq 1$  et  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ . La rotation correspondant à la conjugaison par  $\rho(b_3)$  nous permet de conclure que  $t = \cos(\alpha/2)$ . Enfin, la seconde relation  $b_1 b_2 b_1^{-1} b_3^{-1}$  nous montre que  $\rho(b_2)$  est l'image de  $\rho(b_3)$  sous la rotation d'angle  $\alpha$  autour d'un axe donné par la partie imaginaire du quaternion  $\rho(b_1)$ . Cela nous permet de dire que les trois points  $\rho(b_1), \rho(b_2), \rho(b_3)$  définissent un triangle équilatéral et que notre espace de représentations dépend uniquement du paramètre  $t$ .

On veut enfin enlever les représentations abéliennes donc  $t \neq \pm 1$ .

On en conclut finalement que :  $\hat{R}(\pi_1(S^3 \setminus \text{trèfle})) = (-1, 1)$ .

### Représentations de l'entrelacs de Whitehead WL

On va chercher à calculer l'espace de représentations d'un des entrelacs les plus simples dont le diagramme est présenté à la figure 2.2, nous nous basons sur l'article de Klassen (Kla). Il s'agit d'un entrelacs à deux composantes dont le diagramme peut ne présenter que cinq croisements et une inversion d'un de ces croisement ramène cet entrelacs à l'entrelacs de Hopf ou à l'entrelacs trivial.

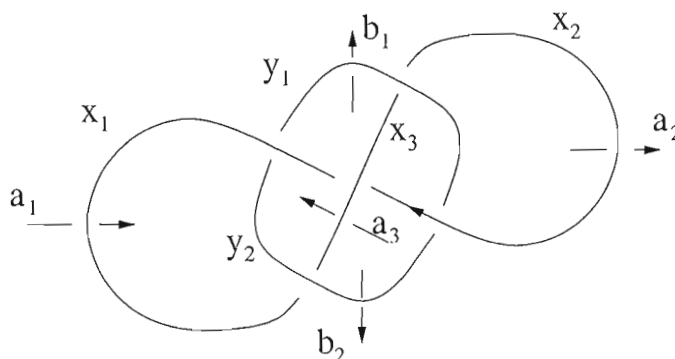


Figure 2.2 Entrelacs de Whitehead

$$\pi_1(S^3 \setminus WL) = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \mid a_3 a_1 a_3^{-1} a_2^{-1}; b_1 a_2 b_1^{-1} a_3^{-1}; \\ b_2^{-1} a_3 b_2 a_1^{-1}; a_2 b_2 a_2^{-1} b_1^{-1}; a_1 b_2 a_1^{-1} b_1^{-1}\}$$

On commence comme dans l'étude précédente par trouver les conditions selon lesquelles  $\rho \in S(\pi_1(S^3 \setminus WL))$ . Or en posant la condition  $[\rho(a_1), \rho(b_1)] = 1$  on obtient  $\rho(b_2) = \rho(a_1)$  ce qui implique que  $\rho(b_2) = \rho(a_3)$ .

En utilisant notre première condition on obtient  $\rho(a_2) = \rho(a_1)$  d'où  $\rho \in S(\pi_1(S^3 \setminus WL))$ . Comme par notre dernière relation  $\rho(b_1) = \rho(b_2) \Leftrightarrow [\rho(a_1), \rho(b_1)] = 1$ , on se retrouve avec la condition suffisante  $\rho(b_1) = \rho(b_2) \Leftrightarrow [\rho(a_1), \rho(b_1)] = 1 \Leftrightarrow \rho \in S(\pi_1(S^3 \setminus WL))$ .

De la même manière que dans l'exercice précédent, on se retrouve, en utilisant nos relations de Wirtinger, à pouvoir dire que  $\rho(a_1), \rho(a_2), \rho(a_3)$  sont dans la même 2-sphère  $\Sigma_a$  et que  $\rho(b_1), \rho(b_2)$  se situent eux aussi sur une même 2-sphère  $\Sigma_b$ .

En ce qui concerne les relations non-abéliennes, on peut, à conjugaison près, dire que  $\rho(b_1)$  et  $\rho(b_2)$  sont déterminés par deux paramètres réels comme il a été déjà mentionné. On considère donc  $-1 < t < 1$  comme premier paramètre et  $0 < \alpha < \pi/2$  comme second.

**Cas 1 :**  $\alpha = \pi/2$  :

On peut supposer que  $(\rho(b_1), \rho(b_2)) = (\cos(\theta) - \sin(\theta)k, \cos(\theta) + \sin(\theta)k)$  Avec la relation  $a_1 b_2 a_1^{-1} b_1^{-1}$  on trouve que  $\rho(a_1)$  se situe sur le plan  $(\vec{i}, \vec{j})$  ce qui implique que nos  $\rho(a_i)$  sont éléments de  $\Sigma_0$ . En utilisant nos relations et en supposant que  $\rho(a_1) = \imath$  (à conjugaison près), on obtient  $\rho(a_2) = \cos(4\theta)\imath + \sin(4\theta)j$ ,  $\rho(a_3) = \cos(2\theta)\imath + \sin(2\theta)j$ .

**Cas 2 :**  $0 < \alpha < \pi/2$  :

On considère dans ce second cas que nos générateurs sont, à conjugaison près, dans une position telle que :

$$(\rho(b_1), \rho(b_2)) = (t + (1 - t^2)^{1/2}(\cos\alpha\imath - \sin\alpha k), t + (1 - t^2)^{1/2}(\cos\alpha\imath + \sin\alpha k))$$

En généralisant par rapport au premier cas, on peut dire que, pour  $\rho$  une représentation non abélienne, il existe  $\theta, \beta, \gamma$  tels que :

$$\begin{aligned} \rho(a_1) &= \cos\theta + \sin\theta(\cos\beta\imath + \sin\beta j) \\ \rho(a_2) &= \cos\theta + \sin\theta(-\cos\beta\imath + \sin\beta j) \\ \rho(a_3) &= \cos\theta + \sin\theta(-\cos\gamma j + \sin\gamma k) \end{aligned}$$

On peut, dès lors, associer un triplet bien défini  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (0, \pi/2) \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  à chacune de nos représentations non abéliennes, où les paramètres  $t$  et  $\theta$  définissent les angles de nos rotations.

**Remarque :** On peut reconsidérer à présent notre premier cas et voir qu'il est possible de faire correspondre un triplet  $(\theta, \beta, \gamma)$  à chacune de ses représentations. On pose donc  $\alpha = \pi/2$  et on identifie les représentations pour lesquelles  $\gamma = 0$  à celles où  $\gamma = \pi$ , afin que notre triplet reste bien défini.

Il nous reste à trouver les critères selon lesquels notre triplet correspond effectivement à une représentation. La première remarque concerne le fait que  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \hat{R}(\pi_1(S^3 \setminus WL)) \Rightarrow \begin{cases} \beta \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ et } \gamma \in [0, \pi] \\ \text{ou } \beta \in [\pi/2, 3\pi/2] \text{ et } \gamma \in [-\pi, 0] \end{cases}$

En effet d'après la relation  $b_2^{-1}a_3b_2a_1^{-1}$  on a  $\rho(a_1)$  qui est envoyé sur  $\rho(a_3)$  par une rotation autour de l'axe défini par  $\tilde{\rho}(b_2)$ . Afin de clarifier cette explication on s'intéresse à la figure 2.3 suivante qui présente l'image de nos générateurs projetés sur  $\Sigma_0$  le long des géodésiques joignant -1 à +1.

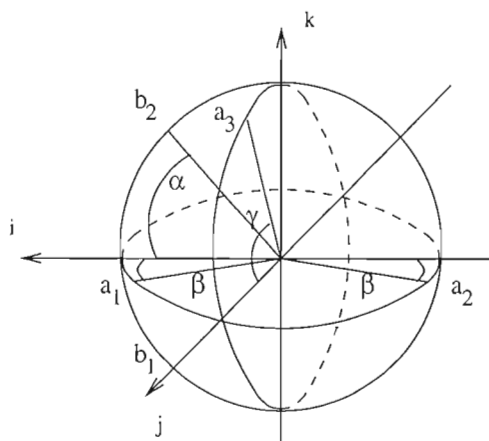


Figure 2.3 Les générateurs projetés sur  $\Sigma_0$

Afin d'éviter de surcharger le dessin nous avons remplacé  $\rho(x)$  par  $x$ . Nos représentations sont donc vues comme des éléments de  $B_1 \cup B_2$  avec

$$\begin{aligned} B_1 &= (0, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, \pi] \\ B_2 &= (0, \pi/2] \times [\pi/2, 3\pi/2] \times [-\pi, 0] \end{aligned}$$

La condition  $b_2^{-1}a_3b_2a_1^{-1}$  nous permet de dire qu'il est nécessaire que

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \hat{R}(\pi_1(S^3 \setminus WL)) \cos\alpha \cos\beta = \sin\alpha \sin\gamma$$

et cette relation est suffisante pour dire que notre élément correspond à une représentation non abélienne . On se retrouve alors avec l'ensemble présenté à la figure 2.4 avec les identifications provenant de l'ambiguïté du cas 1 et de l'égalité des valeurs de nos angles modulo  $2\pi$  . On conclut finalement que  $\hat{R}(\pi_1(S^3 \setminus WL)) = S^1 \times S^1 \setminus \{1, 1\}$ .

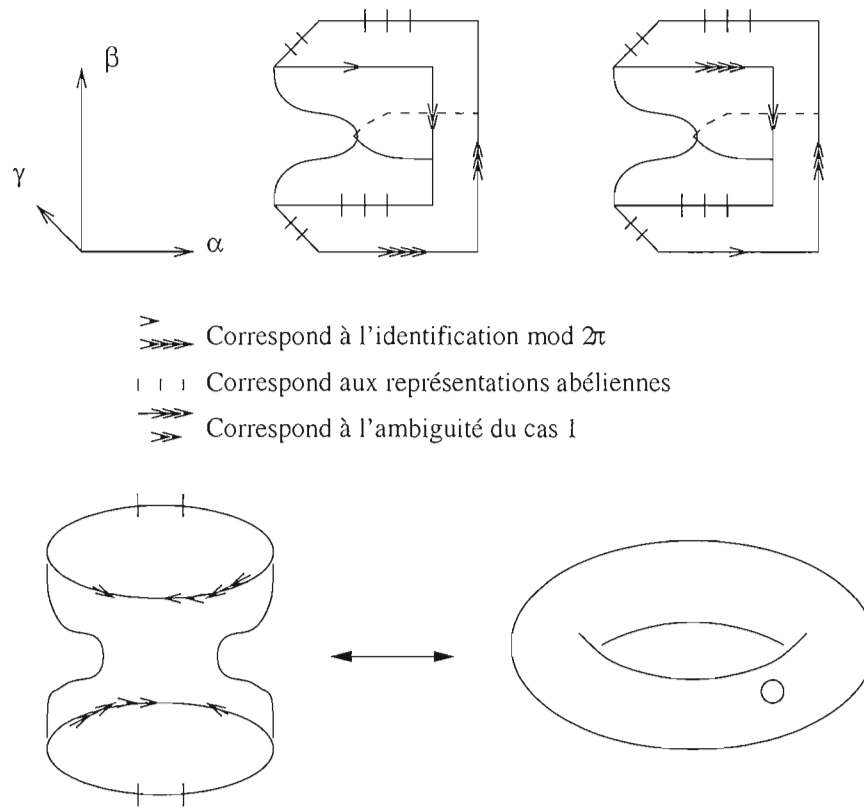


Figure 2.4 Identification pour obtenir  $\hat{R}(\pi_1(S^3 \setminus WL))$

### Représentations du groupe fondamental du tore

Cet espace de représentations est important lorsqu'on étudie les chirurgies dans la mesure où une partie de l'information concernant les espaces de représentations pour la 3-variété obtenue par chirurgie est obtenue en analysant l'effet sur les espaces de représentations de l'opération de restriction au bord. Nous commençons par quelques rappels de topologie algébrique pour étudier le groupe fondamental du tore.

**Théorème 6** (*Seifert Van-Kampen*)

Soit  $X = U_1 \cup U_2$  où  $U_1, U_2$  sont ouverts dans  $X$  et tels que  $U_1, U_2$  et  $U_1 \cap U_2$  soient connexes par arcs. Soit  $x_0 \in U_1 \cap U_2$  et  $G$  un groupe et  $\rho_j : \pi_1(U_j; x_0) \rightarrow G$  ( $j=1,2$ ) des homomorphismes. Soient  $\phi_i, \psi_i$   $i \in \{1,2\}$  les homomorphismes induits par l'inclusion.

Alors si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \xrightarrow{\phi_1} & \pi_1(U_1, x_0) \\ \downarrow \phi_2 & & \downarrow \psi_1 \\ \pi_1(U_2, x_0) & \xrightarrow{\psi_2} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

est commutatif,  $\exists !$  homomorphisme  $\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  tel que  $\begin{cases} \rho \circ \psi_1 = \rho_1 \\ \rho \circ \psi_2 = \rho_2 \end{cases}$

**Corollaire 3** Si  $\pi_1(U_1 \cap U_2) \twoheadrightarrow \pi_1(U_2)$  alors  $\pi_1(X) \simeq \pi_1(U_1) / \ll \phi_1 \ker(\phi_2) \gg$  où  $\ll \phi_1(\ker(\phi_2)) \gg = \left\{ \prod_{i=1}^n \omega_i \phi_1(\gamma_i) \omega_i^{-1} \mid \begin{array}{l} \forall \gamma_i \in \ker \phi_2 \\ \forall \omega_i \in \pi_1(U_1) \end{array} \right\}$

On cherche ici à évaluer le groupe fondamental d'un tore  $T$  en utilisant le théorème de Seifert Van Kampen. Pour ce faire on pose  $T = T_0 \cup D$ , où  $D$  est un disque ouvert et  $T_0$  un tore privé d'un point. On définit donc  $T \xrightarrow{\sim} U_1 = T \setminus p$ ,  $D \xrightarrow{\sim} U_2$  où  $U_2$  est une boule ouverte contenant  $D$  et  $\partial D = T_0 \cap D \xrightarrow{\sim} U_1 \cap U_2$ . On pose également  $x_0 \in T_0 \cap D$ . On en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(T_0 \cap D, x_0) & \xrightarrow{\phi_1} & \pi_1(T_0, x_0) \\ \downarrow \phi_2 & & \downarrow \psi_2 \\ \pi_1(D, x_0) = \{1\} & \xrightarrow{\psi_1} & \pi_1(T, x_0) \end{array}$$

Ainsi, par notre corollaire 3, on a  $\pi_1(T) \cong \pi_1(T_0) / \ll \phi_1(\pi_1(T_0 \cap D)) \gg$ .

A l'aide de la figure 2.5, on conclut donc que  $\pi_1(T_0) \cong F([\sigma], [\tau])$  c'est à dire le groupe libre sur  $[\sigma]$  et  $[\tau]$ . On a de plus le fait que  $\pi_1(T_0 \cap D) \cong \mathbb{Z} = F([v])$ . Afin de compléter

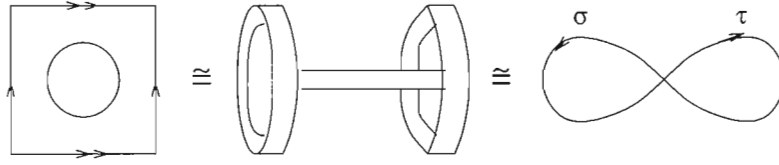


Figure 2.5 Homotopie du tore pointé

le calcul de notre groupe fondamental, il nous faut ajouter la condition :

$$\begin{aligned}
 \pi_1(T) &= \langle [\sigma], [\tau] \mid \phi_1([v]) = \phi_2([v]) \rangle \\
 \Leftrightarrow \pi_1(T) &= \langle [\sigma], [\tau] \mid [\sigma][\tau][\sigma]^{-1}[\tau]^{-1} = 1 \rangle \\
 \text{car } \phi_1([v]) &= [\sigma][\tau][\sigma]^{-1}[\tau]^{-1} \in \pi_1(T_0, x_0). \\
 \Leftrightarrow \pi_1(T) &= \langle [\sigma], [\tau] \mid [\sigma][\tau] = [\tau][\sigma] \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Définissons un nouveau type d'espace de représentations  $\tilde{R}(\Gamma)$ , avec  $\Gamma$  un groupe finiment engendré, dans lequel on ne prive pas notre espace des représentations abéliennes, c'est à dire que  $\tilde{R}(\Gamma) = R(\Gamma)/SO(3)$ . Afin de comprendre le calcul d'espace de représentations associé au tore, on calcule l'espace de représentations associé au nœud trivial. Comme  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ , on peut considérer grâce à notre théorème 6 que  $\tilde{R}(\mathbb{Z}) = [-2, 2]$ , en effet deux matrices  $A$  et  $A'$  dans  $SU(2)$  sont conjuguées si et seulement si  $\text{tr} A = \text{tr} A'$ .

On calcule alors  $\tilde{R}(\pi_1(T)) = R(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$  en commençant par remarquer que chaque homomorphisme  $\rho$  de notre espace est défini par le choix de  $q_1$  et  $q_2 \in SU(2)$  sur lesquels les générateurs  $(1,0)$  et  $(0,1)$  sont envoyés par  $\rho$ . Le fait d'avoir à considérer que  $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rho(a_1)\rho(a_2) = \rho(a_1a_2) = \rho(a_2a_1) = \rho(a_2)\rho(a_1)$  nous montre que  $q_1 = \rho(a_1)$  et  $q_2 = \rho(a_2)$  sont éléments d'un sous groupe commutatif  $G$  de  $SU(2)$ . Nous avons vu précédemment que  $G$  est alors de la forme  $C^{-1}U(1)C$  avec  $C \in SU(2)$ . Étant donné que l'on travaille à classes de conjugaisons près, on déduit, sans perdre de généralité, que  $q_1$  et  $q_2$  sont éléments de  $U(1)$ . Chaque représentation de  $\tilde{R}(\pi_1(T))$  correspond à un couple  $(q_1, q_2)$  dans  $U(1) \times U(1)$ . Le fait de travailler à conjugaison près nous permet de ramener notre couple à un élément de  $[-2, 2] \times U(1)$ . On remarque aussi



que, si  $q_1 = \pm I$ , on peut considérer que  $q_2$  est envoyé sur un intervalle fermé dans  $U(1)$  pour lequel  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$  sont identifiés. Il en va de même lorsqu'on intervertit les rôles de  $q_1$  et  $q_2$ . On déduit alors de ces résultats que  $\tilde{R}(\pi_1 T)$  correspond à une taie d'oreiller ("pillow-case" en anglais).

## 2.4 Chirurgie de Dehn

### Chirurgie le long d'un noeud $K$

En considérant  $N(K)$  le voisinage tubulaire de notre nœud et en découpant notre variété  $M$  le long du tore  $\partial N(K)$ , on obtient deux variétés, l'une étant l'extérieur du nœud  $X_K$  (fermeture de  $M \setminus N(K)$ ) et la seconde correspondant au tore solide  $N(K)$ , qui peut être identifiée avec le tore solide standard  $D^2 \times S^1$ . On a donc  $X_K$  une variété avec bord  $\partial K = T^2$  et  $M = X_K \cup (D^2 \times S^1)$ . On peut alors utiliser un homéomorphisme arbitraire  $h : \partial D^2 \times S^1 \rightarrow \partial K$  afin de rattacher  $D^2 \times S^1$  à  $X_K$ . L'espace que nous obtenons par cette construction,  $Q = X_K \cup_h (D^2 \times S^1)$ , est une 3-variété orientable. On dit alors que  $Q$  est obtenue par chirurgie le long de  $K$ .

La variété  $Q$  ainsi obtenue dépend évidemment du choix de notre homéomorphisme  $h$  et celle-ci est déterminée par l'image sous  $h$  du méridien  $\partial D^2 \times \{*\}$  du tore solide  $D^2 \times S^1$ . Or notre variété  $Q$  dépend uniquement de  $c = h(\partial D^2 \times \{*\})$ . Pour voir cela, il nous faut simplement remarquer que notre tore solide  $N(K)$  peut être rattaché en deux étapes. La première étape consiste à considérer un petit intervalle  $J$  sur  $S^1$  et d'attacher alors  $D^2 \times J$  avec  $h|_{D^2 \times J}$ . La seconde étape consiste alors à attacher la 3-boule restante (car  $D^2 \times S^1 = D^2 \times J \cup D^3$ ) le long de son bord  $\partial D^3 = S^2$ . Or, tout homéomorphisme préservant l'orientation de  $S^2$  est isotope à l'identité c'est à dire qu'il existe  $H : S^2 \times I \rightarrow S^2 \times I$  tel que  $H(S^2, 0) = h$ ,  $H(S^2, 1) = 1$  avec  $H(S^2, t) = h_t$  est un homéomorphisme  $\forall t$ . On en déduit que  $h$  est alors déterminé par l'image de  $\partial D^2 \times \{*\}$  qui correspond à notre méridien  $m$ .

A présent on fixe une orientation sur  $X_K$  qui est induite par  $S^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \infty$ . On

choisit les directions des courbes  $m$  et  $l$  tel que le triplet  $\langle m, l, n \rangle$  soit orienté positivement. On obtient alors un vecteur  $n$  normal à  $\partial K$  pointant à l'intérieur de  $X_K$  comme le montre la figure 2.6.

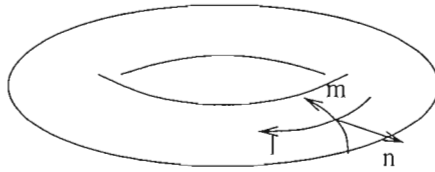
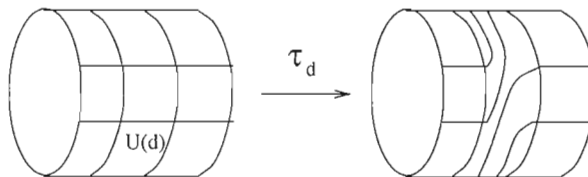


Figure 2.6 Orientation du tore

On peut donc exprimer toutes courbes  $c$  à isotopie près par  $c = p \cdot m + q \cdot l$  avec  $p$  et  $q$  premiers puisque  $c$  est une courbe simple fermée appartenant au tore. Les paires  $(p, q)$  et  $(-p, -q)$  définissent donc la même courbe  $c$  puisque l'orientation de  $c$  n'est pas prise en considération. On en déduit qu'il est possible d'identifier chaque courbe  $c$  par la fraction réduite  $p/q$  correspondante. Afin d'obtenir une bijection entre l'ensemble des classes d'isotopie de notre tore et l'ensemble des fractions réduites, on a simplement à ajouter la fraction  $1/0 = \infty$  qui correspondra à notre méridien  $m$ .

**Remarque :** Le résultat d'une  $1/0$  – chirurgie sur un nœud  $K \subset S^3$  est à nouveau une 3-sphère. Pour s'en convaincre il faut simplement rappeler que le méridien correspondant à  $N(K)$  est alors envoyé sur lui-même et on en conclut que  $h = I_d$  est une solution possible.

On définit les chirurgies décrites précédemment comme faisant parties des **chirurgies rationnelles**. On ajoute qu'une **chirurgie entière** est un cas particulier de chirurgie rationnelle dont le coefficient  $q = \pm 1$ . Nous avons aussi besoin de définir un **corps à anses** qui est une 3-variété obtenue à partir d'une 3-boule en attachant  $g$  copies de 1-anses  $D^2 \times [-1, 1]$ . Il est alors possible de définir un **scindement de Heegaard**,  $H \cup_f H'$  d'une variété  $M$  qui est une manière d'exprimer cette variété  $M = H \cup H'$



**Figure 2.7** Twist de Dehn le long d'une courbe

comme réunion de deux corps à anses  $H$ ,  $H'$  attachés le long de leur bord  $F$  par une application de recollement  $f$  qui est un homéomorphisme  $f : F \rightarrow F$ . On choisit les orientations de  $H$  et  $H'$  de manière à ce que  $f$  soit un homéomorphisme renversant l'orientation.

Soit  $d$  une courbe simple fermée, et soit  $U(d)$  un voisinage annulaire avec  $d$  une composante de bord de  $U(d)$ . On peut alors identifier notre anneau avec  $\{z \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$  dans le plan complexe. On définit à présent un **twist de Dehn** le long de  $d$  par l'homéomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \tau_d : U(d) &\rightarrow U(d) \\ r.e^{i\phi} &\rightarrow r.e^{i\phi+2\pi(r-1)} \quad \text{et } \tau_d = Id \text{ sur } F \setminus (U(d)). \end{aligned}$$

On peut représenter un twist de Dehn comme illustré à la figure 2.7. De manière moins formelle, on peut s'imaginer qu'un twist de Dehn est obtenu en découpant notre espace le long de notre courbe  $d$ . On effectue ensuite une torsion de  $360^\circ$  d'un des cotés de cet espace, puis on recolle celui-ci le long de notre courbe  $d$ .

**Lemme 2** Soient  $h_1$  et  $h_2 : \partial H \rightarrow \partial H'$  des homéomorphismes entre les bords de deux corps à anses  $H$  et  $H'$  tel que  $h_1 = h_2 \tau_c$  avec  $\tau_c$  le twist de Dehn le long d'une courbe  $c \subset \partial H$ . Alors la variété  $M_2 = H \cup_{h_2} H'$  est obtenue de la variété  $M_1 = H \cup H'$  par une chirurgie entière le long de  $K \subset M_1$  isotope à l'image de  $c$ .

**Preuve :** On suit l'explication de (Sav) pp. 29–30. On pousse notre courbe  $c$  à l'intérieur du corps à anses  $H$  pour obtenir un nœud  $K \subset H$ . Soit  $N(K)$  un voisinage tubulaire

de  $K$  et  $A \simeq S^1 \times I$ , un anneau connectant  $c$  et  $\partial N(K)$ , c'est à dire que  $\partial A = c \cup K$ . Posons  $\phi : H \setminus N(K) \rightarrow H \setminus N(K)$  un homéomorphisme qui coupe l'espace  $H \setminus N(K)$  le long de l'anneau  $A$ , on peut alors considérer deux faces  $A^+$  et  $A^-$  sur ce nouvel espace. On définit cet homéomorphisme par le fait que  $A^+$  reste fixe et que  $A^-$  soit retourné de  $360^\circ$  avant d'être rattaché à  $A^+$ . On en déduit immédiatement que  $\phi|_{\partial H}$  correspond au twist de Dehn  $\tau_c$  tandis que  $\phi|_{\partial N(K)}$  est un twist de Dehn  $\tau_l$  avec  $l = A \cap N(K)$  longueur du nœud  $K$ . Soit  $M'_i = (H \setminus N(K)) \cup_{h_i} H'$ ,  $i=1,2$ . On a alors la formule suivante

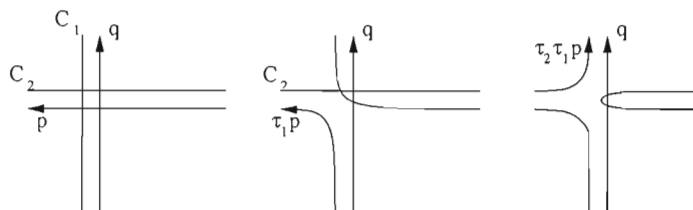
$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in H \setminus N(K) \\ x & \text{si } x \in H' \end{cases}$$

qui définit un homéomorphisme entre  $M'_1$  et  $M'_2$ . Ainsi, en enlevant un tore solide  $N(K)$  de chaque variété  $M_1$  et  $M_2$ , on obtient deux variétés homéomorphes. On a donc obtenu  $M_2$ , à partir d'une chirurgie de  $M_1$  le long d'un nœud  $K$ . Étant donné que  $\Phi$  envoie un méridien de  $N(K)$  sur  $m \pm l$ , il s'agit effectivement d'une chirurgie entière. CQFD

### **Théorème 7** (*Lickorish*)

*Toute 3-variété fermée orientable  $M$  peut être obtenue de  $S^3$  par une Chirurgie entière sur un entrelacs  $L \subset S^3$ .*

**Preuve :** On s'inspire à la fois de Saveliev et de Lickorish. Comme toute 3-variété fermée orientable  $M$  admet un scindement de Heegaard, on peut voir  $M = H \cup_{h_2} H'$  où  $H$  et  $H'$  sont deux corps à anses de genre  $g$ , et  $h_2$  est un homéomorphisme de bord renversant l'orientation. On rappelle que pour deux courbes simples fermées  $p$  et  $q$  contenues dans  $\partial H$  qui s'intersectent transversalement en exactement un point, il existe  $\tau$  twist de Dehn tel que  $p \sim \tau q$  comme le montre la figure 2.8. Dans cette figure, on a  $C_1$  et  $C_2$  qui correspondent respectivement à un déplacement parallèle de  $p$  et  $q$ . Les twists de Dehn  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont définis de telle sorte que ces applications diffèrent de l'identité uniquement sur  $U(C_1)$  et  $U(C_2)$ . Il est possible de généraliser ce résultat pour  $p_1, p_2, \dots, p_n$  des courbes simples fermées vivant dans  $\partial H$ , la réunion de ces dernières ne séparant pas  $F$  (voir (Lic) pp. 125-127). On a en effet pour  $q_1, q_2, \dots, q_n$  un ensemble de courbes ayant les



**Figure 2.8** Obtention de deux courbes homotopes par twists de Dehn.

mêmes propriétés, l'existence de  $h : \partial H \rightarrow \partial H'$  un homéomorphisme généré par des twists tel que  $hp_i = q_i \forall i = 1, 2, \dots, n$ . On peut donc déduire que  $h_2 h_1^{-1} = \tau_{c_1} \tau_{c_2} \dots \tau_{c_n}$  où les  $\tau_{c_i}$  sont des twists de Dehn le long des courbes  $c_i$ . À partir du lemme 2, on en conclut qu'une suite de chirurgie entière sur  $S^3$  correspondant à la multiplication des  $\tau_{c_i}$  nous permet d'obtenir  $M$ .

## CHAPITRE III

### REPRÉSENTATIONS DIHÉDRALES ET CHIRURGIE

On commence par introduire le groupe binaire diédral  $N$  dans  $SU(2)$ . On définit ce groupe par  $N = S_A^1 \cup S_B^1$ , avec

$$\begin{aligned} S_A^1 &= \{a + bz : a^2 + b^2 = 1\} \\ \text{et } S_B^1 &= \{cj + dk : c^2 + d^2 = 1\}. \end{aligned}$$

On peut donc voir  $N$  comme l'union disjointe de deux cercles. De plus comme  $N = S_A^1 \cup jS_A^1$  on a  $S_A^1$  un sous groupe de  $N$  d'indice 2. En prenant  $K \subset S^3$  un nœud, et en posant  $\Gamma = \pi_1(K)$  on obtient la présentation de Wirtinger suivante :

$$\Gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_n : (x_{ji}^{\epsilon_i})x_i(x_{ji}^{-\epsilon_i}) = x_{i+1} \ 1 \leq i \leq n-1\} \text{ où } \epsilon_i = \pm 1$$

Soit  $L$  un entrelacs orienté, et  $F$  une surface de Seifert pour  $L$  tel que l'orientation de  $\partial F$  coïncide avec celle de  $L$ . Le théorème 2 nous assure l'existence d'une telle surface. Soit  $S$  la matrice de Seifert associée à  $F$ . Le polynôme :

$$\Delta_L(t) = \det(t^{1/2}S - t^{-1/2}S^T)$$

est appelé le polynôme d'Alexander de l'entrelacs  $L$ . Si  $L = K$  est un nœud,  $\Delta_K(t)$  est indépendant du choix de l'orientation de  $K$  et coïncide avec le polynôme d'Alexander précédemment défini. En général,  $\Delta_L(t)$  dépend de l'orientation de  $L$ .

**Proposition 4 :**

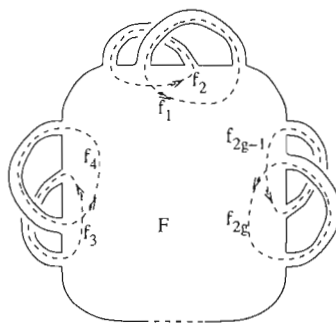
(i) pour tout entrelacs orienté  $L$ , on a  $\Delta_L(t) = \Delta_L(t^{-1})$ .

(ii) pour tout nœud  $K$  orienté  $\Delta_K(+1) = \pm 1$ .

**Preuve :** On rappelle qu'il s'agit d'une égalité modulo  $\pm t^{\pm n}$ .

(i) On a, pour une matrice de Seifert  $A$  de dimension  $n \times n$  associé à notre entrelacs  $L$ , le résultat suivant :  $\Delta_L(t) = \det(tA - A^T) = \det(tA^T - A)^T = \det(-t(-A^T + t^{-1}A)) = t^{-n} \det(t^{-1}A - A^T) = \Delta_L(t^{-1})$ .

(ii) Soit  $A$  une matrice de Seifert pour  $K$  provenant d'une base standard comprenant  $2g$  courbes orientées  $\{f_i\}$  appartenant à une surface de Seifert  $F$  de genre  $g$ . On rappelle que  $A - A^T$  est une matrice de représentation de la forme d'intersection de la surface  $F$ , conséquence de la construction de la forme de Seifert. De plus, comme  $F$  est une surface orientable, il est possible de considérer nos générateurs de la manière présentée à la figure 3.1. En utilisant le fait que  $\Delta_K(t) = \det(tA - A^T)$  on obtient  $\Delta_K(1) = \pm \det(A - A^T)$ .



**Figure 3.1** Choix d'une base pour le groupe fondamental de  $F$ .

Comme  $(A - A^T)_{ij} = l_k(f_i^-, f_j) - l_k(f_i^+, f_j)$ , notre matrice  $(A - A^T)$  est constituée de blocs du type  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  le long de la diagonale et toutes les autres entrées sont nulles. Cela nous permet de conclure que  $\Delta_K(1) = \pm 1$ . CQFD

**Corollaire 4** Pour tout nœud  $K$ ,  $\Delta_K(t) = a_0 + a_1(t^{-1} + t) \dots + a_k(t^{-k} + t^k)$  où les  $a_i$  sont des entiers et  $a_0$  est impair.

**Preuve :** par (i) on a que  $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ . On pose  $\Delta_K(t) = \sum_{i=0}^N c_i t^i$ , alors  $\Delta_K(t^{-1}) = \sum_{i=0}^N c_i t^{-i}$ . De plus, comme  $\Delta_K(t^{-1})$  reste inchangé sous multiplication par  $\pm t^N$ , on a :

$$\begin{aligned}\Delta_K(t) &= (\Delta_K(t) + t^N \Delta_K(t^{-1}))/2 \\ \Leftrightarrow \Delta_K(t) &= (\sum_{i=0}^N c_i t^i + t^N \sum_{i=0}^N c_i t^{-i})/2 \\ \Leftrightarrow \Delta_K(t) &= (\sum_{i=0}^N (c_i + c_{N-i}) t^i)/2\end{aligned}$$

On pose  $b_i = (c_i + c_{N-i})/2$  pour en déduire que  $\Delta_K(t) = \sum_{i=0}^N b_i t^i$  avec  $b_i = b_{N-i}$  ou  $b_i = -b_{N-i} \forall i$ . Supposons à présent que  $N$  est impair, alors  $\Delta_K(1)$  est la somme d'un nombre pair d'éléments pairs, ce qui contredirait notre théorème. On suppose donc que  $N$  est pair, ce qui nous donne deux choix. Dans le cas où  $b_{N-i} = -b_i \forall i$ , on se retrouve avec  $b_{N/2} = 0$  ce qui équivaut à dire que  $\Delta_K(1) = 0$  puisque tous nos termes  $b_{N-i}$  s'annulent avec les  $b_i$ . Il nous reste donc notre second cas,  $b_{N-i} = b_i \forall i$ , ce qui nous permet de déduire que  $b_{N/2}$  est impair puisque l'on doit obtenir un résultat impair en sommant un nombre pair d'éléments en plus de  $b_{N/2}$ . On a donc vérifié que  $\Delta_K(t)$  était de la forme souhaitée avec  $a_0$  impair. CQFD

**Théorème 8 :** *Le nombre de classes de conjugaisons d'homomorphismes non abélien  $\Gamma \twoheadrightarrow N$  est égal à  $(|\Delta_K(-1)| - 1)/2$  où  $\Delta_K(t)$  est le polynôme d'Alexander de  $K$ .*

**Preuve :** On suit une preuve de l'article de Klassen (Kla). On note que notre invariant  $|\Delta_K(-1)| = |H_1(X_2)|$  est un nombre impair positif, ce qui est requis pour l'égalité ci-dessus. On suppose que  $\rho : \Gamma \twoheadrightarrow N$  a une image non-abélienne. On note que  $\forall a \in N$  :

$$\begin{aligned}aS_A^1 a^{-1} &= \{ae^{\imath\phi} a^{-1} | \phi \in \mathbb{R}\} \\ &= \{e^{\imath\psi} e^{\imath\phi} e^{-\imath\psi} | \phi, \psi \in \mathbb{R}\} \cup \{e^{\imath\alpha} j e^{\imath\phi} j^{-1} e^{-\imath\alpha} | \phi, \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{e^{\imath\phi} | \phi \in \mathbb{R}\} \cup \{e^{\imath\alpha} j e^{\imath\phi} j^{-1} e^{-\imath\alpha} | \phi, \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{e^{\imath\phi} | \phi \in \mathbb{R}\} = S_A^1.\end{aligned}$$



Donc  $S_A^1 \trianglelefteq N$ . Ainsi pour tout  $x_i \in \Gamma$  on ne peut avoir que deux possibilités, soit tout les  $\rho(x_i)$  sont dans  $S_A^1$  ou tous sont dans  $S_B^1$  car d'après notre présentation de Wirtinger, tout nos éléments sont conjugués. On remarque que dans le cas où tout nos éléments  $\rho(x_i)$  sont dans  $S_A^1$ , notre représentation  $\rho$  est abélienne et elle ne nous intéresse donc pas. Soit  $e^{i\theta}j \in S_B^1$  avec  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , alors chaque deux éléments de  $S_B^1$  sont conjugués dans  $N$  puisque  $e^{i\alpha}(e^{i\theta}j)e^{-i\alpha} = e^{i\alpha}e^{i\theta}e^{i\alpha}j = e^{i(\theta+2\alpha)}j$ .

On peut donc supposer, à conjugaison près, que  $\rho(x_n) = j$ . Définissons de plus pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $\theta_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  l'image par  $\rho$  de nos générateurs  $x_i$ ,  $\rho(x_i) = e^{i\theta_i}j$ . Une fois que l'on a défini nos  $\rho(x_i)$ , il nous est possible d'exprimer nos relations dans un système d'équations linéaires. Prenons une relation  $x_{ji}^{\epsilon_i}x_ix_{ji}^{-\epsilon_i} = x_{i+1}$ , ce qui, en terme d'image par notre homomorphisme  $\rho$ , nous donne (avec  $\epsilon_i = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \rho(x_{ji})\rho(x_i)\rho(x_{ji}^{-1})\rho(x_{i+1}^{-1}) &= \rho(1) \\ \Leftrightarrow e^{i\theta_{ji}}je^{i\theta_i}je^{i\theta_{ji}}je^{-i\theta_{i+1}}j &= e^0 \\ \Leftrightarrow e^{i\theta_{ji}}e^{-i\theta_i}je^{i\theta_{ji}}e^{i\theta_{i+1}}j^{-1} &= e^0 \\ \Leftrightarrow e^{-\theta_i+2\theta_{ij}}je^{i\theta_{i+1}}j^{-1} &= e^0 \\ \Leftrightarrow \theta_i - 2\theta_{ij} + \theta_{i+1} &\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

On obtient le même résultat lorsque  $\epsilon_i = -1$ . Du fait que  $\theta_n = 0$ , on déduit de ce calcul que l'ensemble des  $n$ -uplets  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, 0) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ , solution de notre système, est en bijection avec l'ensemble  $J$  des représentations  $\Gamma$  dans  $N$  envoyant  $x_n$  sur  $j$ . On va donc représenter  $\rho$  par une matrice  $(n-1) \times n$  dont les entrées non nulles sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne correspondent pour les colonnes  $i$ ,  $i+1$ ,  $j_i$  à 1, 1, -2 respectivement.

On veut à présent compter le nombre de classes de représentations. Pour ce faire, on construit une matrice  $B$  définie par la matrice précédente à laquelle nous avons enlevée la dernière colonne. Le fait que  $\theta_n = 0$  nous permet d'affirmer que nous ne perdons pas d'information. On remarque alors que  $B$  correspond à la matrice  $A + A^T$  avec  $A$ , matrice d'Alexander, ceci à permutation de ligne près. On déduit de ce résultat que

$\det(B) = \pm \det(\Delta_K(-1))$ . On sait de plus que  $B$  est inversible puisque  $\Delta_K(-1)$  est un nombre impair. En voyant  $B : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  comme une transformation linéaire, on peut obtenir le nombre de solutions  $s$  de notre système modulo  $2\pi\mathbb{Z}$ . En effet on a

$$\begin{aligned} s = \text{card}\{B^{-1}(2\pi\mathbb{Z}^{n-1})/(2\pi\mathbb{Z}^{n-1})\} &= \text{card}\{(2\pi\mathbb{Z}^{n-1})/B(2\pi\mathbb{Z}^{n-1})\} \\ &= \text{card}\{(\mathbb{Z}^{n-1})/B(\mathbb{Z}^{n-1})\} = |\det(B)| \end{aligned}$$

Il nous reste à enlever les représentations abéliennes qui sont au nombre d'une seule, celle qui envoie tout les générateurs sur  $j$ . Enfin, en conjuguant par  $j$  on obtient une autre représentation, donc le nombre de classe non abélienne est égal à  $(|\Delta_K(-1)| - 1)/2$ . Parmi ces solutions, certaines correspondent à la même représentation puisque :

$$\begin{aligned} \theta_i - 2\theta_{ij} + \theta_{i+1} &\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \Leftrightarrow -\theta_i + 2\theta_{ij} - \theta_{i+1} &\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

L'équivalence entre ces deux égalités est obtenue en conjuguant par  $j$ . C'est évidemment (d'après nos équations) la seule façon de compter plusieurs fois une même représentation. CQFD

### 3.1 Invariant construit par chirurgie

La question que nous nous posons concerne la construction de ce même invariant topologique,  $\Delta_K(-1)$  définit sous le terme **torsion du nœud**  $K$ , à partir de chirurgie de Dehn. Nous allons donc essayer de voir quels sont les changements apportés par une chirurgie  $+1$  le long d'un croisement sur la valeur de  $\Delta_K(-1)$ . Afin de clarifier ce qu'est une chirurgie de type  $+1$  le long d'un croisement, commençons par rappeler les résultats obtenus par Kirby.

La question que Kirby a soulevé concerne l'équivalence des 3-variétés fermées orientables obtenues par chirurgie le long d'un entrelacs. On sait en effet d'après le résultat de Lickorish que toute 3-variété fermée orientable peut être obtenue à partir d'une chirurgie le long d'un entrelacs et il paraît bien naturel de trouver les critères sur ces entrelacs

selon lesquels nos chirurgies définissent la même 3-variété. Il est utile de commencer par définir **un nœud signé** : qui est un diagramme de nœud auquel on a assigné un rationnel  $q \in \mathbb{Q}$ . Cette notation signifie que l'on fait une chirurgie de  $+q$  le long de ce nœud.

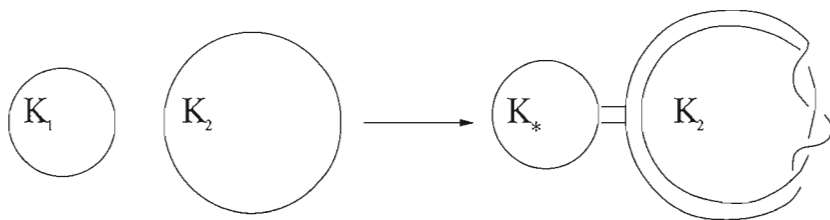
La question soulevée plus haut correspond donc à trouver des équivalences entre les entrelacs signés. Les mouvements correspondant à ces critères sont appelés mouvements de Kirby.

**Mouvement de Kirby 1** : Il est possible d'ajouter ou de faire disparaître un nœud trivial signé  $\pm 1$ . Autrement dit lorsqu'un entrelacs est doté d'une composante non nouée signée  $\pm 1$ , il est possible de faire notre chirurgie selon cette composante sans pour autant transformer la variété sur laquelle on opère.

$$L \longmapsto L + \text{ (un cercle) } \pm 1$$

**Mouvement de Kirby 2** : Il est possible de lier deux composantes d'un entrelacs de la manière suivante : soient  $K_1$  et  $K_2$  deux nœuds signés  $n_1$  et  $n_2$  respectivement, on définit  $K'_2$  une longitude de  $K_2$  telle que  $l_k(K_2, K'_2) = n_2$ . On remplace alors la paire  $K_1 \cup K_2$  par  $K_* \cup K_2$  où  $K_* = K_1 *_b K'_2$  avec  $b$  une bande  $(I \times I)$  connectant  $K_1$  à  $K_2$  comme le montre la figure ci-dessous.

On signe alors notre nœud  $K_*$  par  $n = n_1 + n_2 + l_k(K_1, K_2)$ . Le fait d'avoir présenté l'équivalence entre les diagrammes de nœuds signés nous permet de déduire qu'une chirurgie le long d'un entrelacs  $L$ , vu comme l'union d'un nœud trivial signé  $+1$  et d'un nœud  $K$  signé  $n$ , va correspondre à une chirurgie le long de  $K'$ , où  $K'$  est le nœud  $K$  auquel on a "inversé" un croisement. Il faut, pour que cette proposition soit vraie,



que le nœud trivial “entoure” un croisement de la manière illustrée à la figure 3.2. On commence par montrer comment “sortir” le nœud trivial signé.

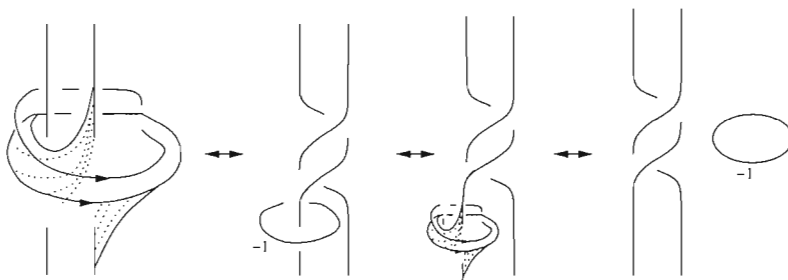


Figure 3.2 Équivalence par mouvement de Kirby 2

### 3.2 Chirurgies et représentations diédrales

Pour construire notre invariant, on commence par prendre le point double du diagramme d’un nœud  $K$  obtenu par la projection  $p$  de notre plongement dans  $\mathbb{R}^2$ . La préimage de cette application en notre point double est bien évidemment une droite comprenant deux points dans  $K$  notés  $x_1$  et  $x_2$ . On considère le milieu  $x$  du segment  $[x_1, x_2]$ . En posant  $d(x_1, x_2) = \epsilon$  la distance entre  $x_1$  et  $x_2$  induit par la métrique sur  $\mathbb{R}^3$  précédemment utilisée. On définit  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(x, \epsilon)}$  la boule incluse dans  $\mathbb{R}^3$  de rayon  $\epsilon$  centrée en  $x$ .

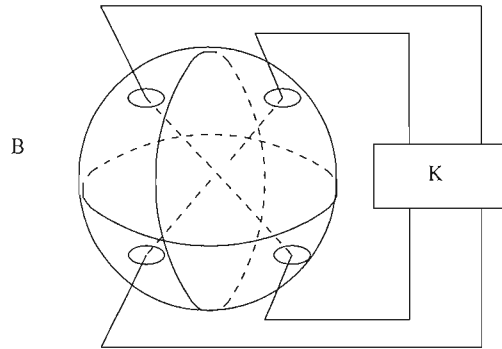
En définissant  $X_K$  la fermeture de  $M \setminus N(K)$ , on va étudier les espaces de représentations

du groupe fondamental de  $\mathcal{B} \cap X_K$  dans le groupe binaire diédral  $N$ . Si on prend le voisinage tubulaire de  $K$  suffisamment petit, on peut voir  $\mathcal{B} \cap X_K$  comme une boule à laquelle on a retiré deux cylindres ouverts  $D_1$  et  $D_2$  avec  $\partial D_1 \subset \partial \mathcal{B}$  et  $\partial D_2 \subset \partial \mathcal{B}$ .

On en déduit que  $\partial \mathcal{B} \cap X_K$  est isotope à une sphère  $S^2$  privée de quatre points. On utilise alors la projection stéréographique et on considère que notre sphère épointée est placée dans  $\mathbb{R}^3$  de manière à ce que l'un des trous soit situé au nord (coordonnées  $(1,0,0)=n$ ).

On rappelle que la projection stéréographique est donnée par :

$$\begin{aligned} i_N : U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 && \text{avec } U_1 = S^2 \setminus \{n\} \\ (x_0, x_1, x_2) &\rightarrow (x_1/(1-x_0), x_2/(1-x_0)) \end{aligned}$$



Le diagramme ci-contre présente un noeud K et le voisinage d'un de ces croisement sur lequel nous pouvons faire une chirurgie.

**Figure 3.3** Chirurgie le long d'un croisement

On obtient alors  $\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{3pts\})$ . Ce résultat nous permet de dire que  $\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\}) = F_3$ , le produit libre de trois copies de notre groupe  $\mathbb{Z}$ .

Soit  $\Gamma$  un groupe fini avec la présentation suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{x_1, x_2, \dots, x_n : w_1, w_2, \dots, w_m\} \\ D(\Gamma) &= Hom(\Gamma, N) \\ A_D(\Gamma) &= \{\rho \in D(\Gamma)/SO(3) \mid im(\rho) \text{ est abélien}\} \\ \hat{D}(\Gamma) &= (D(\Gamma) - A_D(\Gamma))/SO(3) \end{aligned}$$

Étudions alors l'espace des représentations de notre groupe fondamental  $\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\})$  dans le groupe binaire diédral, noté  $\hat{D}(\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\}))$ . D'après le calcul précédent on a  $\hat{D}(\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\})) = \hat{D}(F_3)$ . Comme l'espace de représentations d'un produit libre est le produit cartésien des espaces de représentations, on calcule  $D(\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\}))$  de la manière suivante :  $D(\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\})) = (S_A^1 \cup S_B^1) \times (S_A^1 \cup S_B^1) \times (S_A^1 \cup S_B^1)$  que l'on développe alors pour se ramener à :

$$\begin{aligned} D(\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\})) &= (S_A^1 \times S_A^1 \times S_A^1) \cup (S_B^1 \times S_A^1 \times S_A^1) \\ &\cup (S_A^1 \times S_B^1 \times S_A^1) \cup (S_B^1 \times S_B^1 \times S_A^1) \\ &\cup (S_A^1 \times S_A^1 \times S_B^1) \cup (S_A^1 \times S_B^1 \times S_B^1) \cup (S_B^1 \times S_B^1 \times S_B^1) \end{aligned}$$

On s'intéresse à présent à toutes les représentations  $\rho \in A_D(\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\}))$ . On commence par considérer chaque triplet de  $S_{i_1}^1 \times S_{i_2}^1 \times S_{i_3}^1$  avec  $k = 1, 2, 3$  et  $i_k = A, B$  en identifiant  $S_{i_k}^1 = j$  pour un unique  $k$  lorsque  $i_k = B$ . On peut dire que tout produit cartésien  $S_{i_1}^1 \times S_{i_2}^1 \times S_{i_3}^1$  sur lequel  $SO(3)$  agit et qui contient au moins deux copies de  $S_A^1$  correspond à une représentation abélienne, remarque dont on peut déduire que :

$$\begin{aligned} A_D(\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\})) &= (S_A^1 \times S_A^1 \times S_A^1) \cup (j \times S_A^1 \times S_A^1) \\ &\cup (S_A^1 \times j \times S_A^1) \cup (S_A^1 \times S_A^1 \times j) \end{aligned}$$

On peut dès lors calculer notre espace de représentations dans le groupe binaire diédral  $N$ .

$$\begin{aligned} \hat{D}(\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\})) &= (j \times S_B^1 \times S_A^1) \cup (S_A^1 \times S_B^1 \times j) \\ &\cup (S_B^1 \times S_B^1 \times j) \cup (j \times S_A^1 \times S_B^1) \end{aligned}$$

Cet espace de représentations correspond donc à une union disjointe de quatre tores, où chaque représentation correspond simplement à un point de notre tore.

Calcul de  $\hat{D}(\pi_1(\mathcal{B} \cap X_K))$  :

Pour ce faire nous reprenons les générateurs que nous avons défini pour la sphère  $S^2 \setminus \{4pts\}$ . Dans le calcul précédent, nous avons considéré seulement trois générateurs car on a utilisé la projection stéréographique de  $S^2 \setminus \{4pts\}$ . Dans notre cas, on va donc conserver les mêmes générateurs car on identifiera deux de ceux-ci dans  $\pi_1(\mathcal{B} \cap X_K)$ . Il nous reste simplement à voir si il existe une relation entre ces générateurs, et c'est effectivement le cas. Si on applique une projection régulière à notre diagramme de noeud, on peut obtenir une présentation de Wirtinger pour celui-ci. En restreignant cette présentation à notre croisement, il s'agit de la relation cherchée.

On a donc par construction  $\hat{D}(\pi_1(\mathcal{B} \cap X_K)) = \hat{D}(x_1, x_2, x_3 : x_1^\epsilon x_2 x_1^{-\epsilon} = x_3)$ .

On rappelle que  $X_K = (X_K \setminus \mathcal{B}) \cup_{S^2 \setminus \{4pts\}} (\mathcal{B} \cap X_K)$ . Cette décomposition est utile lorsqu'on s'intéresse aux espaces de représentations des trois ensembles que l'on vient de définir en utilisant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^2 \setminus \{4pts\}) & \xrightarrow{\phi_1} & \pi_1(X_K \setminus \mathcal{B}) \\ \downarrow \phi_2 & & \downarrow \psi_1 \\ \pi_1(\mathcal{B} \cap X_K) & \xrightarrow{\psi_2} & \pi_1(X_K) \end{array}$$

Bien évidemment les applications  $\phi_i$  et  $\psi_i$  où  $i = 1, 2$  ne font qu'ajouter des relations à notre groupe fondamental de départ  $\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\})$ , ce sont donc des homomorphismes surjectifs. On peut alors considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\hat{D}(\pi_1(X_K)) & \xrightarrow{i_1^*} & \hat{D}(\pi_1(X_K \setminus \mathcal{B})) \\
\downarrow i_2^* & & \downarrow j_1^* \\
\hat{D}(\pi_1(\mathcal{B} \cap X_K)) & \xrightarrow{j_2^*} & \hat{D}(\pi_1(S^2 \setminus \{4pts\}))
\end{array}$$

Notre espace de représentations  $\hat{D}(\mathcal{B} \cap X_K)$  est alors injecté dans la composante de  $\hat{D}(S^2 \setminus \{4pts\})$  correspondant à  $(S_B^1 \times S_B^1 \times j)$ . L'application injective  $j_2^*$  nous fait voir  $\hat{D}(\mathcal{B} \cap X_K)$  comme une courbe dans le tore  $(S_B^1 \times S_B^1 \times j)$ . En effet le générateur  $x_3 \in \pi_1(\mathcal{B} \cap X_K)$  est envoyé sur  $j$  par tout homomorphisme  $j_2^* \rho$  où  $\rho \in \hat{D}(S^2 \setminus \{4pts\})$ . On pose  $j_2^* \rho(x_1) = je^{i\alpha}$  et  $j_2^* \rho(x_2) = je^{i\beta}$ . Alors notre relation dans  $\pi_1(\mathcal{B} \cap X_K)$  nous impose la condition  $j_2^* \rho(x_2) j_2^* \rho(x_1) \cdot (j_2^* \rho(x_2))^{-1} j_2^* \rho(x_3)^{-1}$  qui s'écrit plus simplement sous la forme  $\alpha - 2\beta = 0$ . Dans notre tore, cette relation correspond, lorsque  $\rho(x_1)$  est envoyé sur le méridien  $m$  et  $\rho(x_2)$  est envoyé sur une longitude  $l$ , à une courbe  $c_1 = 2m + l$ . On peut, de la même manière, considérer que notre espace  $\hat{D}(X_K \setminus \mathcal{B})$ , est homotope à une courbe  $c_2 = p_2 m + q_2 l$ .

### 3.3 Nombre d'intersection sur le tore

Il apparaît, d'après les résultats précédents, que notre espace  $\hat{D}(X_K)$  est défini comme l'intersection des courbes  $c_1$  et  $c_2$ . On va donc faire appel à une preuve qui définisse ce nombre d'intersection en considérant le tore sur lequel on travaille comme le produit  $[0, 1] \times [0, 1]/h$  où  $h$  est notre application de recollement identifiant  $[0, 1] \times \{0\}$  à  $[0, 1] \times \{1\}$  et  $\{0\} \times [0, 1]$  à  $\{1\} \times [0, 1]$ .



**Théorème 9** *Pour deux courbes  $c_i$  et  $c_j$  du tore vu comme  $[0, 1] \times [0, 1]/h$ , on définit une application :*

$$I : (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j) \rightarrow \left| \det \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \right|$$

où  $I(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j)$  est le **nombre d'intersection** entre nos deux courbes  $c_i = pm + ql$  et  $c_j = p'm + q'l$ ,  $m$  et  $l$  étant respectivement le méridien et la longitude pour  $T$ , avec de plus  $\tilde{c}_i = (p, q)$  et  $\tilde{c}_j = (p', q')$ .

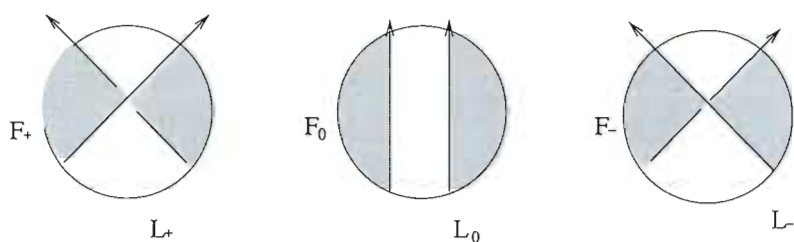
**Preuve :** Si nos deux courbes sont parallèles mais non confondues alors on a évidemment  $I(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j) = 0$  puisque le nombre d'intersection est nul. On considère alors que deux courbes confondues ont un nombre d'intersection nul puisqu'on travaille à homotopie près. En posant  $c_k = n(mp + ql)$ , on trouve  $I(\tilde{c}_k, \tilde{c}_j) = nI(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j)$ . Ce résultat est évident lorsqu'on rappelle que  $c_k = n(pm + ql)$  est représenté par  $n$  copies de  $c'$  que l'on ramène dans une même copie de notre tore  $T$ . Par conséquent, notre application  $I$  est une forme  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire alternée. Une telle forme est un multiple entier de la fonction déterminant. Afin de définir cette application, on rappelle simplement que  $I((1, 0), (0, 1)) = 1$ . On conclut en rappelant que  $I(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j) = I(\tilde{c}_j, \tilde{c}_i)$ . CQFD

Comme le nombre de classe de conjugaison des homomorphismes  $\Gamma \rightarrow N$  est égal à  $(|\Delta_K(-1)| - 1)/2$ . Cette information revient à dire que  $|\hat{D}(X_K)| = (|\Delta_K(-1)| - 1)/2$ . Ce nombre de classe de conjugaison est donné par la relation  $I((2, 1), (p, q))$  puisque  $|j_1^*(\hat{D}(X_K \setminus \mathcal{B})) \cap j_2^*(\hat{D}(\mathcal{B} \cap X_K))| = |\hat{D}(X_K)|$ , résultat que l'on peut réécrire sous la forme  $|j_1^*(\hat{D}(X_K \setminus \mathcal{B})) \cap j_2^*(\hat{D}(\mathcal{B} \cap X_K))| = I((2, 1), (p, q))$ . Comme  $I((2, 1), (p, q)) = (|\Delta_K(-1)| - 1)/2$  est donné, tout ce travail nous permet de considérer l'ensemble des courbe  $c$  qui répondent à cette condition. On a donc trouver l'ensemble des courbes qui peuvent représenter  $j_1^*(X_K \setminus \mathcal{B})$ .

### 3.4 Relations skeins et formule de Conway en $t = -1$

On cherche dans cette section une interprétation géométrique de la relation skein de Conway pour le polynôme d'Alexander des noeuds dans  $S^3$ . Nous nous intéressons à cette relation skein dans le cas où  $t = -1$ , pour lequel nous pouvons utiliser les espaces de représentations binaires diédrales.

On commence par introduire ce que nous allons définir comme étant  $L_+$ ,  $L_-$  et  $L_0$ , les entrelacs présentés à la figure 3.4. Les ensembles  $F_+$ ,  $F_-$  et  $F_0$  désignent comme d'habitude les surfaces de Seifert de nos entrelacs  $L_+$ ,  $L_-$  et  $L_0$  respectivement. On utilise dans cette figure la même construction que celle qui nous a permis de définir nos espaces de représentations dans le groupe binaire diédral. Cela signifie qu'il existe un voisinage  $V$  d'un point  $x_0 \in S^3$ , où  $x_0$  est un point double du diagramme régulier  $L$ , pour lequel il n'y a pas d'autre point double dans  $p(V)$ . Ici  $p : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la projection utilisée pour ramener notre entrelacs à son diagramme.



**Figure 3.4** Entrelacs pour le calcul des relations skeins

Les entrelacs  $L_+$ ,  $L_-$  et  $L_0$  ne diffèrent les uns des autres qu'à l'intérieur de ce voisinage  $V$ . La figure 3.4 nous montre de quelle manière ils diffèrent, les cercles représentant la projection de notre voisinage  $V$  sous notre application  $p$ . La partie grisée correspond quant à elle à la surface de Seifert  $F_i$  associée à l'entrelacs  $L_i$ .

**Théorème 10** (*formule de Conway en  $t = -1$* )

*Soit  $L_-$ ,  $L_0$  et  $L_+$  les trois entrelacs orientés tel que définis précédemment. On trouve*

une relation entre les polynômes d'Alexander associés à ces entrelacs.

$$\Delta_{L_+}(-1) - \Delta_{L_-}(-1) = -2\Delta_{L_0}(-1).$$

**Preuve :** On remarque tout d'abord que les surfaces  $F_+$  et  $F_-$  sont homéomorphes. Soit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des courbes sur  $F_0$  formant une base pour  $H_1(F; \mathbb{Z})$ , et soit  $a_0$ , une courbe sur  $F_{\pm}$ , tel que les courbes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  forment une base pour  $H_1(F_{\pm}; \mathbb{Z})$ . Si  $S_-$ ,  $S_+$ ,  $S_0$  sont des matrices de Seifert correspondant à ces bases, alors :

$$S_- = \begin{pmatrix} a & c_1 & \cdots & c_n \\ b_1 \\ \vdots & S_0 \\ b_n \end{pmatrix}, \quad S_+ = S_- + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -S_+ - S_+^T &= -S_- - S_-^T \begin{pmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_{11} - 2 & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} \\ \vdots & -S_0 - S_0^T \\ s_{n1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

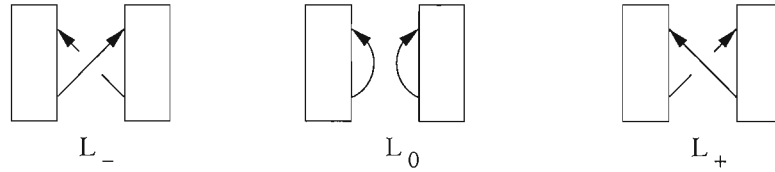
On rappelle que dans notre cas, on s'intéresse à notre polynôme d'Alexander évalué en  $-1$  et que par définition  $\Delta_L(-1) = \det(-A - A^T)$ . A partir du calcul ci-dessus, et en appliquant la fonction déterminant à notre dernière égalité, on trouve :

$$\begin{aligned}
\det(-S_+ - S_+^T) &= \det \begin{pmatrix} s_{11} - 2 & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & & & \\ \vdots & -S_0 - S_0^T & & \\ s_{n1} & & & \end{pmatrix} \\
&= \det(-S_- S_-^T) - 2 \det(-S_0 - S_0^T).
\end{aligned}$$

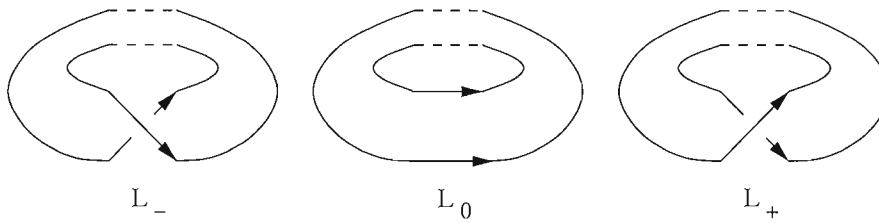
On a effectivement obtenu notre condition sur  $\Delta_L(-1)$ , puisque notre égalité ci-dessus est exactement  $\Delta_{L_+}(-1) - \Delta_{L_-}(-1) = -2\Delta_{L_0}(-1)$ . CQFD

Ce résultat, permet de calculer de manière inductive la valeur du polynôme d'Alexander d'un nœud en  $t = -1$  par changements de croisements successifs. La figure ci-dessous nous montre que dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire lorsque  $L_+$  et  $L_-$  sont des nœuds, on a  $L_0$  qui est nécessairement un entrelacs.

Cas 1: Nos noeuds  $L_-$  et  $L_+$  sont reliés de manière à ce que  $L_0$  soit un entrelacs à deux composantes libres.



Cas2: Nos noeuds  $L_-$  et  $L_+$  sont reliés de manière à ce que  $L_0$  soit un entrelacs à deux composantes a et b dont on ne connaît pas le nombre d'entrelacement.



Etant donné que nous avons une interprétation de cette valeur  $\Delta_K(-1)$  en termes de représentations binaires diédrales du groupe du noeud  $K$ , il apparait intéressant de donner une preuve géométrique du Théorème 10 en utilisant les résultats développés dans les sections 3.2 et 3.3. Il ne semble pas y avoir de difficultés majeures à étendre le Théorème 8 au cas des entrelacs. Nous effectuons un calcul qui nous indique la direction à prendre.

La formule de Conway en  $t = -1$  nous permet de trouver une relation en ce qui concerne notre nombre de représentations diédrales. On va alléger la notation en posant  $I_+ = I((2, 1), (p, q))$ ,  $I_- = I((-2, 1), (p, q))$  et  $I_0$  le nombre de représentations diédrales correspondant à notre entrelacs  $L_0$ . On prend de plus  $\Delta_{K+}(-1) > 0$ . De plus, comme

$$I_+ = (|\Delta_{K+}(-1)| - 1)/2 \Rightarrow |\Delta_{K+}(-1)| = 2I_+ + 1$$

**Cas 1 :**  $\Delta_{K-}(-1) > 0, \Delta_{K+}(-1) - \Delta_{K-}(-1) > 0$  :

Avec ces conditions, on a

$$\begin{aligned} & (|\Delta_{K+}(-1)| - 1)/2 - (|\Delta_{K-}(-1)| - 1)/2 = |\Delta_{K_0}(-1)| \\ \Leftrightarrow & (|\Delta_{K+}(-1)| - 1)/2 - (|\Delta_{K-}(-1)| - 1)/2 = (2I_0 + 1) \\ \Leftrightarrow & I_+ - I_- = 2I_0 + 1 \end{aligned}$$

En posant  $I_0 = I((a, b), (p, q))$  On obtient alors la relation suivante :

$$(4 - 2a)q - 2bp = 1$$

qui n'a pas de solution puisque le membre de gauche est pair alors que celui de droite est impair.

**Cas 2 :**  $\Delta_{K-}(-1) > 0, \Delta_{K+}(-1) - \Delta_{K-}(-1) < 0$  :

Avec ces conditions, on a

$$\begin{aligned}
& -((|\Delta_{K+}(-1)| - 1)/2 - (|\Delta_{K-}(-1)| - 1))/2 = |\Delta_{K_0}(-1)| \\
\Leftrightarrow & -((|\Delta_{K+}(-1)| - 1)/2 - (|\Delta_{K-}(-1)| - 1))/2 = (2I_0 + 1) \\
\Leftrightarrow & -I_+ + I_- = 2I_0 + 1
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la relation :

$$(-4 - 2a)q + (-2b)p = 1$$

qui n'a pas non plus de solution puisque le membre de gauche est pair alors que celui de droite est impair.

**Cas 3 :**  $\Delta_{K-}(-1) < 0, \Delta_{K+}(-1) - \Delta_{K-}(-1) > 0$  :

Avec ces conditions, on a

$$\begin{aligned}
& (|\Delta_{K+}(-1)| - 1)/2 + (|\Delta_{K-}(-1)| - 1)/2 = |\Delta_{K_0}(-1)| - 1 \\
\Leftrightarrow & (|\Delta_{K+}(-1)| - 1)/2 - (|\Delta_{K-}(-1)| - 1)/2 = 2I_0 \\
\Leftrightarrow & I_+ + I_- = 2I_0
\end{aligned}$$

On obtient alors la relation suivante :

$$a = 0 \text{ et } b = 1$$

qui correspond à une longitude.

**Cas 4 :**  $\Delta_{K-}(-1) < 0, \Delta_{K+}(-1) - \Delta_{K-}(-1) < 0$  :

Avec ces conditions, on a

$$\begin{aligned}
& -(|\Delta_{K+}(-1)| - 1)/2 + (|\Delta_{K-}(-1)| - 1)/2 = |\Delta_{K_0}(-1)| + 1 \\
\Leftrightarrow & -(|\Delta_{K+}(-1)| - 1)/2 - (|\Delta_{K-}(-1)| - 1)/2 = 2I_0 + 2 \\
\Leftrightarrow & -I_+ - I_- = 2I_0 + 2
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la relation :

$$-2aq + (2 - 2b)p = 2$$

Pour l'heure, nous n'avons pas été en mesure d'exprimer le nombre de représentations binaires diédrales pour  $L_0$  comme différence de nombre d'intersections dans le tore associés à  $L_+$  et  $L_-$ . Si ceci peut être fait à partir des nombres d'intersection sur le tore, nous aurons alors une interprétation géométrique de la formule de Conway en  $t = -1$ .

### 3.5 Invariant de Casson

#### Définition

Un des buts lorsque nous avons commencé ce travail était de comprendre la construction de l'invariant de Casson. En prenant exemple sur les calculs faits pour les représentations binaires diédrales, nous avons eu idée de modifier la construction de l'invariant de Casson pour les sphères d'homologie dans le cas où la 3-variété est donnée comme chirurgie le long d'un nœud de  $S^3$ .

Nous commençons cette section par un bref exposé de la théorie développée par Casson. Le livre de Saveliev constitue une bonne introduction au sujet.

Soit  $\mathcal{S}$  la classe des sphères d'homologie entière orientées de dimension 3. **L'invariant de Casson** est une application  $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}$  qui satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\lambda(S^3) = 0$ , et  $\lambda(\mathcal{S})$  n'est pas contenu dans aucun sous groupe propre de  $\mathbb{Z}$ .
2. Pour toute sphère d'homologie,  $\Sigma$ ,  $K \subset \Sigma$  un nœud, et  $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  la différence :

$$\lambda\left(\Sigma + \frac{1}{m+1} \cdot K\right) - \lambda\left(\Sigma + \frac{1}{m} \cdot K\right) \text{ est indépendante de } m.$$

**Remarque :** La notation  $\Sigma + \frac{1}{m} \cdot K$  signifie que l'on fait une chirurgie de type  $1/m$  le long de notre nœud  $K$  qui vit dans la sphère d'homologie  $\Sigma$ . Il s'agit donc d'une 3-variété obtenue par chirurgie le long d'un nœud.

### Construction à partir des espaces de représentations

La construction fondamentale de Casson a été de définir son invariant non pas de façon axiomatique comme ci-dessus, mais plutôt comme nombre d'intersection d'espaces de représentations obtenus par une décomposition de Heegaard. En reprenant les notations habituelles,  $\Sigma$  est une sphère d'homologie,  $M_1 \cup_F M_2$  est un scindement de Heegaard de  $\Sigma$ , et  $F_0 = F \setminus D^2$ . On a alors le diagramme commutatif suivant dans lequel les flèches sont des inclusions :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i_1} & M_1 \\ F_0 \nearrow & \downarrow i_2 & \downarrow j_1 \\ & M_2 & \xrightarrow{j_2} \Sigma \end{array}$$

En appliquant le foncteur  $\pi_1$  à ce dernier on obtient un diagramme commutatif de groupes dans lequel tout nos homomorphismes sont surjectifs.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 F & \longrightarrow & \pi_1 M_1 \\ \pi_1 F_0 \nearrow & \downarrow & \downarrow \\ & \pi_1 M_2 & \longrightarrow \pi_1 \Sigma \end{array}$$

On peut alors définir notre foncteur  $R$  des représentations des groupes fondamentaux dans le groupe  $SU(2)$  et l'appliquer à notre diagramme pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc} R(\pi_1 F) & \xleftarrow{i_1^*} & R(\pi_1 M_1) \\ R(\pi_1 F_0) \swarrow & \uparrow i_2^* & \uparrow j_1^* \\ & R(\pi_1 M_2) & \xleftarrow{j_2^*} R(\pi_1 \Sigma) \end{array}$$

On remarque que toutes les applications de ce diagramme sont injectives.

**Lemme 3** *L'intersection en la représentation triviale  $R(\pi_1 M_1) \cap R(\pi_1 M_2)$  dans  $R(\pi_1 F_0)$  est transverse.*

Il s'agit là de la seule représentation abélienne de  $\pi_1(\Sigma)$  dans  $SU(2)$  puisque nous avons supposé que  $\Sigma$  était sphère d'homologie entière. La condition de transver-



salité nous permet d'isoler cette représentation triviale et de nous concentrer sur les représentations non-abéliennes, soit  $\hat{R}(\pi_1 \Sigma)$ .

**Lemme 4** *L'intersection des variétés lisses ouvertes  $\hat{R}(\pi_1 M_1) \cap \hat{R}(\pi_1 M_2)$  dans  $\hat{R}(\pi_1 F)$  est compacte.*

Casson démontre alors qu'on peut choisir une isotopie de  $\hat{R}(\pi_1 F)$  à support compact qui modifie  $\hat{R}(\pi_1 M_2)$  en  $\hat{R}(\pi_1 M_2)_*$  de façon à ce que  $\hat{R}(\pi_1 M_2)_*$  soit transverse à  $\hat{R}(\pi_1 M_1)$ . Comme  $\dim \hat{R}(\pi_1 M_1) = \dim \hat{R}(\pi_1 M_2)_* = 3g - 3$  et que  $\dim \hat{R}(\pi_1 F) = 6g - 6$ , l'intersection  $\hat{R}(\pi_1 M_1) \cap \hat{R}(\pi_1 M_2)_*$  consiste alors en un nombre fini de points. En donnant des orientations à  $\hat{R}(\pi_1 M_1)$  et  $\hat{R}(\pi_1 M_2)$ , Casson définit l'intersection algébrique de ces deux espaces :

$$*(\hat{R}(\pi_1 M_1) \cap \hat{R}(\pi_1 M_2)) = \sum_{p \in \hat{R}(\pi_1 M_1) \cap \hat{R}(\pi_1 M_2)_*} \epsilon_p$$

avec les  $\epsilon_p$  égaux à  $\pm 1$  dépendant de l'orientation de nos espaces.

On peut se référer à (Sav) aux pages 149-151 pour les preuves des deux lemmes et pour voir que l'intersection est bien définie.

L'invariant de Casson se définit alors d'une seconde manière par :

$$\lambda(\Sigma, M_1, M_2) = \frac{-1^g}{2} * (\hat{R}(\pi_1 M_1) \cap \hat{R}(\pi_1 M_2))$$

Pour que la théorie donne bel et bien un invariant topologique, il faut alors vérifier que cette définition ne dépendent pas du scindement de Heegaard choisi.

## CONCLUSION

Conclusion L'invariant de Casson permet en particulier, de démontrer l'existence de représentations non-triviales dans  $SU(2)$  du groupe fondamental des sphères d'homologies. En un certain sens, il s'agit d'une vaste généralisation du travail effectué sur les espaces de représentations dans le groupe binaire diédral pour les compléments de nœuds, puisque l'on considère ici toutes les représentations dans  $SU(2)$ . Notons par contre que les représentations sont comptées avec signe dans le cas de l'invariant de Casson, ce qui a la fâcheuse conséquence que l'invariant peut être nul même s'il existe des représentations non-abéliennes du groupe fondamental. Une question intéressante serait de savoir si le signe est toujours le même dans le calcul des représentations binaires diédrales contribuant à l'invariant de Casson. Un autre problème que nous n'avons pas eu le temps d'explorer est l'existence d'une interprétation homologique du nombre de représentations binaires diédrales des sphères d'homologie.

Finalement, il serait intéressant d'arriver à construire l'invariant de Casson à partir des espaces de représentations liés à la chirurgie le long d'un nœud. Ceci demande alors de développer une théorie de l'intersection dans le pillow-case des espaces de représentations de groupes de nœuds et de l'espace de représentations du groupe fondamental du tore solide utilisé lors de la chirurgie de Dehn. Un des aspects très différents dans ce cas est le fait que les espaces de représentations des groupes de nœuds peuvent être très compliqués, alors que dans la construction de Casson les espaces considérés sont simples et tout le problème est concentré sur la question de la transversalité d'intersections. Dans notre cas, les espaces de groupes de nœuds doivent être modifiés avec beaucoup de précautions pour obtenir un nombre d'intersection dans le tore qui soit un invariant topologique de la 3-variété obtenue par chirurgie.

## BIBLIOGRAPHIE

- (Bur) : Gerhard Burde et Heiner Zieschang. 1985 *Knots*.  
Berlin : De Gruyter Studies in Mathematics.
- (God) : Claude Godbillon. 1971 *Éléments de topologie Algébrique*.  
Paris : Hermann.
- (Kla) : Eric Klassen. *Representation Spaces of Knot Groups in  $SU(2)$* .  
Trans. A.M.S. **326** (1991), pp. 795–828
- (Kau) : Louis Kauffman. 1987 *On knots*.  
Princeton : Princeton University Press.
- (Laf) : Jacques Lafontaine. 1996 *Introduction aux variétés différentielles*.  
Grenoble : Grenoble Sciences.
- (Lic) : Raymond Lickorish, W. 1997 *An Introduction to Knot Theory*.  
New-York : Springer.
- (Liv) : Charles Livingston. 1993 : *Knot theory*.  
Washington : The Mathematical Association of America.
- (Mas) : William Massey. 1991 *A basic course in Algebraic Topology*.  
New-York : Springer.
- (Pol) : Victor Guillemin et Alan Pollack. 1974 *Differential Topology*.  
Massachussets : Prentice-Hall.
- (Rol) : Dale Rolfsen. 1990 *Knots and Links*.  
Houston : Publish or Perish.
- (Sav) : Nikolai Saveliev. 1999 *Lectures on the topology of 3-Manifolds*.  
Berlin : De Gruyter Textbook.